

Wielomiany

- Wielomianem stopnia n zmiennej x nazywamy funkcję określoną wzorem:
 $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ gdzie $a_n \neq 0$, n należy do zbioru liczb naturalnych.
- Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami wielomianu**. Aby obliczyć sumę współczynników wielomianu należy obliczyć $w(1)$.
- Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym** wielomianu.
- Stopień wielomianu jest to **największy wykładnik potęgi** zmiennej x .
- Jednomian $w(x)$ stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.
- Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy **wielomianem zerowym**.

Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{sześciąt sumy}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{sześciąt różnicy}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{suma sześciątów}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{różnica sześciątów}$$

Usuń niewymierność z mianownika

$$\frac{10}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

Korzystamy z $a^2 + b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\frac{10(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{10(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2}$$

Jeśli wielomiany: u , w oraz $u + w$ są niezerowe i $\text{st}(u) \leq \text{st}(w)$, to: $\text{st}(u+w) \leq \text{st}(w)$

Iloczyn wielomianów stopnia m i n jest wielomianem stopnia $m+n$.
 $\text{st}(w \cdot v) = \text{st}(w) + \text{st}(v)$

st- stopień wielomianu

Dzielenie wielomianów

- wielomian w jest podzielny przez dwumian q jest reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa 0.

Dla danych wielomianów w i q , gdzie $q \neq 0$, istnieją wielomiany p i r takie, że: $w = p \cdot q + r$ oraz $r = 0$ lub stopień r jest niższy niż stopień q

Schemat Hornera

możemy z niego skorzystać wyłącznie przy dzieleniu wielomianu $w(x)$ przez dwumian w postaci $x-a$

Ogólny schemat

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + 7 : x-d = ax^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$$

To współczynniki przy kolejnych potęgach x w wielomianie

	a	0	b	0	c	7
d	a	e	f	g	h	0

Jeżeli reszta się nie wyzeruje oznacza to, że wielomian nie jest podzielny przez dwumian.

a, e, f, g to **współczynniki** przed x z ilorazu. h to **reszta**

Zawsze musimy zapisać wszystkie współczynniki stojące przy kolejnych potęgach x - od najwyższej do najniższej.
 Jeżeli jakiś x^n nie występuje w wielomianie oznacza to że jego współczynnik wynosi 0.

Przykład

$$2x^2 - 5x - 12 : x - 4 = 2x + 3$$

Dwa wielomiany są równe gdy są wielomianami zerowymi lub mają ten sam stopień, te same współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej oraz równe wyrazy wolne

Przedstaw wielomian jako iloczyn czynników

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3$$

$$(a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

Korzystamy z $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$a^4 - a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 3a^2b^2$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 3a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (3ab)^2$$

$$(a^2 + b^2)^2 - (3ab)^2 = (a^2 + b^2 + 3ab)(a^2 + b^2 - 3ab)$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 3ab)(a^2 + b^2 - 3ab)$$

Uzupełniamy kwadrat

Korzystamy z $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Rozkład na czynniki

- Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.
- Rozkład wykorzystujemy przy równaniach i nierównościach wielomianowych

Metoda grupowania

$$w(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 9x - 6$$

$$w(x) = x^4(3x+2) - 2x^3(3x+2) - 3(3x+2)$$

$$w(x) = (x^4 - 2x^3 - 3)(3x+2)$$

$$w(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)(3x+2)$$

$$w(x) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^2 + 1)(3x+2)$$

$$x^4 - 2x^3 - 3 \quad t = x^2$$

$$t^2 - 2t - 3$$

$$\Delta = 16$$

$$t_1 = 3 \quad (t-3)(t+1)$$

$$t_2 = -1 \quad (x^2 - 3)(x^2 + 1)$$

$$w(x) = x^3 - 5x - 4$$

$$w(x) = x^3 - x - 4x - 4$$

$$w(x) = x(x^2 - 1) - 4(x+1)$$

$$w(x) = x(x-1)(x+1) - 4(x+1)$$

$$w(x) = (x+1)[x(x-1) - 4]$$

$$w(x) = (x+1)(x^2 - x - 4)$$

$$w(x) = (x+1)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Delta = 17$$

$$x_1 = (1 + \sqrt{17})/2$$

$$x_2 = (1 - \sqrt{17})/2$$

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych + schemat Hornera

$$w(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$$

$$w(1) = 0$$

Szukamy pierwiastka całkowitego

	2	-5	5	-2
1	2	-3	2	0

$$w(x) = (2x^2 - 3x + 2)(x-1)$$

$$\Delta < 0$$

Równanie kwadratowe i postać iloczynowa

$$w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$$

$$w(x) = x^2(x^2 - 5x + 6)$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$w(x) = x^2(x-2)(x-3)$$

Wzory skróconego mnożenia

$$w(x) = 9x^4 + 16$$

$$w(x) = (9x^4 + 24x^2 + 16) - 24x^2$$

$$w(x) = (3x^2 + 4)^2 - (2\sqrt{6}x)^2$$

$$w(x) = (3x^2 - 2\sqrt{6}x + 4)(3x^2 + 2\sqrt{6}x + 4)$$



Przedstaw wielomian jako iloczyn dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych

$$w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 11x - 5$$

$$w(k) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 5)$$

$$w(k) = x^4 + bx^3 - 5x^2 + ax^3 + abx^2 - 5ax + x^2 + bx - 5$$

Wymnażamy

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab-4=-6 & b=-1 \\ -5a+b=-11 & a=2 \end{cases}$$

Współczynniki przy kolejnych potęgach x w wielomianie k(x) muszą być takie same jak w w(x) (bo to musi być ten sam wielomian)

Układamy układ równań

$$w(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - x - 5)$$

Twierdzenie Bézouta

Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w, to wielomian w jest podzielny przez dwumian x-a

Jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian x-a, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w

Jeżeli q jest wielomianem drugiego stopnia, to wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)q(x) + ax + b$, gdzie p jest pewnym wielomianem oraz $ax + b$ jest resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian q.

Reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian x-3 wynosi 7, a przez dwumian x+2 wynosi -3. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez $(x-3)(x+2)$

$$w(x) = p(x)q(x) + ax + b$$

$$w(x) = p(x)(x-3) + 7 \quad w(3) = 7$$

$$w(x) = p(x)(x+2) - 3 \quad w(-2) = -3$$

Z twierdzenia o reszcie

$$w(x) = k(x)(x-3)(x+2) + ax + b$$

$$w(3) = k(3)(3-3)(3+2) + 3a + b$$

$$3a + b = 7$$

$$w(-2) = k(-2)(-2-3)(-2+2) - 2a + b$$

$$-2a + b = -3$$

Z twierdzenia o reszcie

$$\begin{cases} 3a + b = 7 & a = 2 \\ -2a + b = -3 & b = 1 \end{cases}$$

$$\text{reszta: } 2x + 1$$

Szkicowanie wykresu wielomianu

- Jeżeli w rozkładzie wielomianu na czynniki wyrażenie $(x-a)$ występuje więcej niż jeden raz to jest to **pierwiastek k-krotny** wielomianu. zapisujemy go wtedy w postaci $(x-a)^n$ gdzie n określa krotność pierwiastka a.
- Wykres wykorzystujemy przy rozwiązywaniu nierówności wielomianowych do odczytania rozwiązań analogicznie do nierówności kwadratowych

Krok po kroku

- rysujemy oś OX
- zaznaczamy miejsca zerowe
- Wykres zaczynamy rysować od prawej strony
- Jeśli:
 - współczynnik przy najwyższej potęgce x jest ujemny wykres zaczynamy rysować od dołu
 - współczynnik przy najwyższej potęgce x jest dodatni wykres zaczynamy rysować od góry
- Jeżeli występuje pierwiastek k-krotny to:
 - przy krotnościach parzystych "odbijamy" od osi x
 - przy krotnościach nieparzystych "przechodzimy" przez oś x

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian x-a, to: $r = w(a)$

Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian u, nie wykonując dzielenia

$$w(x) = x^7 - 33x + 11$$

$$u(x) = (x+1)(x-2)$$

$$w(-1) = -1 + 33 + 11 = 43$$

$$w(2) = 128 - 66 + 11 = 73$$

$$w(x) = (x+1)(x-2)k(x) + ax + b$$

$$w(-1) = -a + b$$

$$w(2) = 2a + b$$

Z twierdzenia o reszcie

$$\begin{cases} -a + b = 43 & a = 10 \\ 2a + b = 73 & b = 53 \end{cases}$$

$$\text{reszta: } 10x + 53$$

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian w o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego

Wyznacz wartość parametru a, dla której liczba x^0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w

$$w(x) = 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + ax + a + 10 \quad x^0 = -1$$

	6	8	-8	a	a+10
-1	6	2	-10	10+a	0

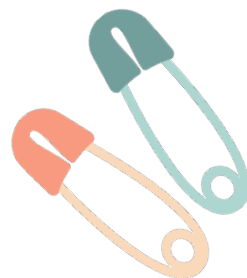
Z twierdzenia o pierwiastkach całkowitych

$$w(x) = (x+1)(6x^3 + 2x^2 - 10x + 10 + a)$$

	6	2	-10	10+a
-1	6	-4	-6	6

Aby -1 było pierwiastkiem wielomian musi być podzielny przez -1 a więc reszta musi wynosić 0

$$\begin{aligned} 10 + a + 6 &= 0 \\ a &= -16 \end{aligned}$$



1.

2.

4.

5.