



Wielomiany

Weronika Rzesiewska, Julia Suligorska, Zosia Igielska

Wiadomości ogólne o wielomianach

Wielomianem nazywamy funkcję postaci:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

n należy do naturalnych

a_n nie jest zerem

$a_n + a_{n-1} \dots a_1$ = współczynniki
wielomianu

a_0 = wyraz wolny

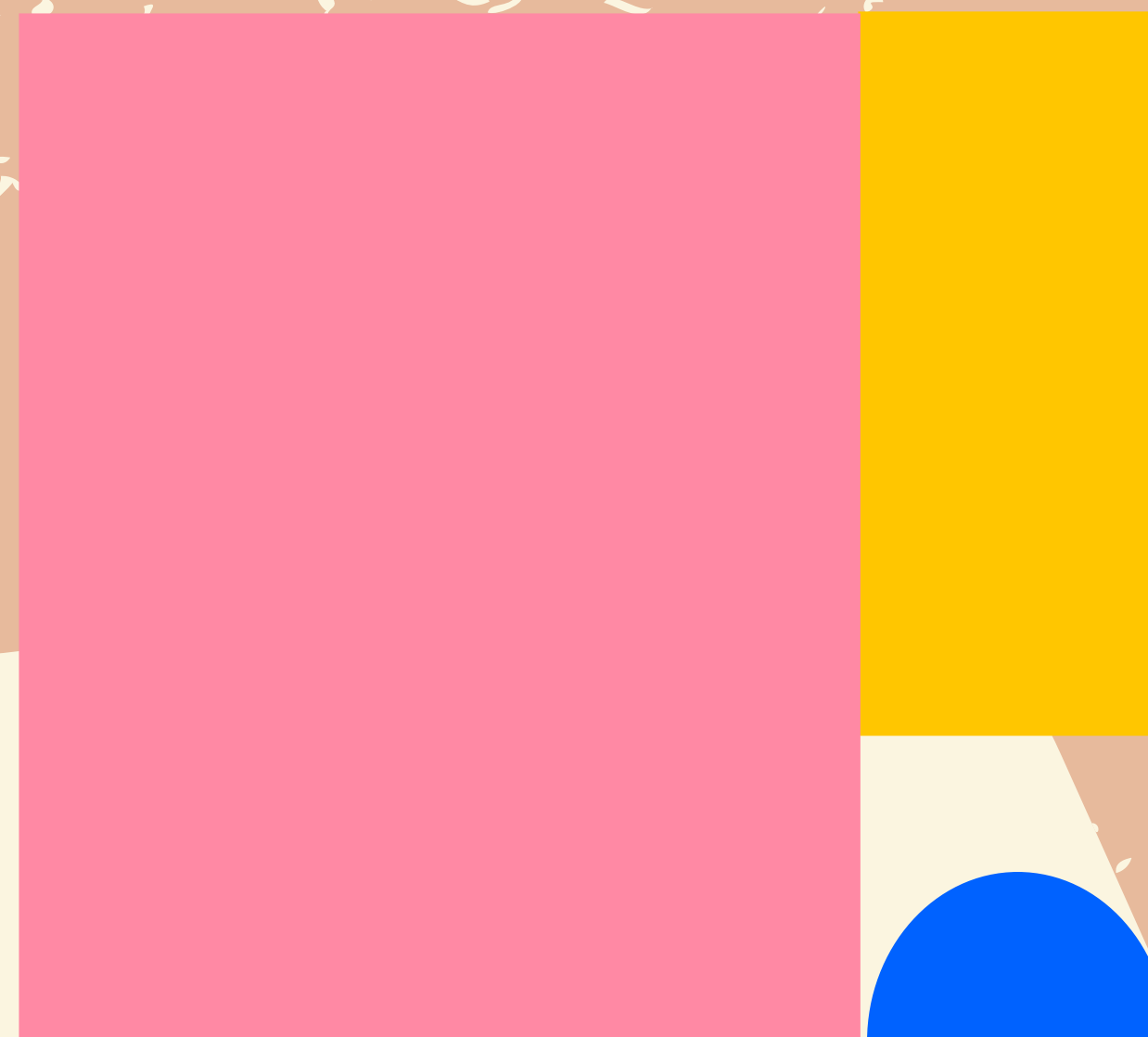
wielomiany stopnia 0

np.: $w(x) = 3$

$w(x) = -5$

wielomian zerowy

$$w(x) = 0$$



Dodawanie i odejmowanie wielomianów

- $$W(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x, \quad U(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$$

$$w(x) + u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

sumą wielomianów u i w jest wielomian zerowy

- $$w(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3, \quad U(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$$

$$w(x) - u(x) = (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) =$$

$$= 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x =$$

$$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3$$

- Jeśli wielomiany u, w są niezerowe i $\text{st}(u) \leq \text{st}(w)$ to:
 $\text{st}(u+w) \leq \text{st}(w)$

Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

- sześciąt sumy:
 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- suma sześciątów:
 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

- sześciąt różnicy:
 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

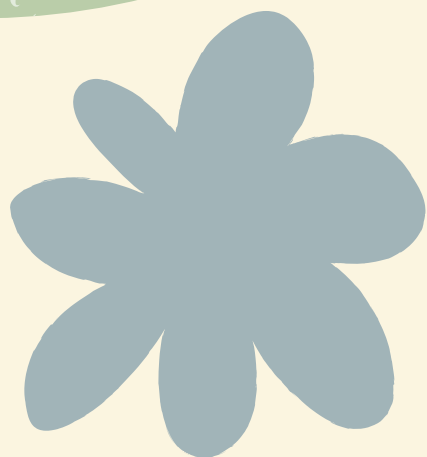
- różnica sześciątów:
 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Mnożenie wielomianów

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomian stopnia $m+n$

Mnozemy każdy z każdym

$$\begin{aligned}
 U(x) \cdot w(x) &= (2x-3) \cdot (x^2-2x+2) = \\
 &= 2x(x^2-2x+2) - 3(x^2-2x+2) = \\
 &= 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3x^2 + 6x - 6 = \\
 &= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6
 \end{aligned}$$



Rozkład wielomianów na czynniki:

Każdy niezerowy wielomian można
przedstawić jako iloczyn czynników
stopnia co najwyżej drugiego

np.:

$$\begin{aligned}w(x) &= x^6 - 6x^5 + 9x^4 = \\ &= x^4(x^2 - 6x + 9) = \\ &= x^4(x-3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w(x) &= x^3 - 4x^2 + 2x - 8 \\ w(x) &= x^2(x-4) + 2(x-4) = \\ &= (x^2+2)(x-4)\end{aligned}$$

Dzielenie wielomianów

Schemat Hornera

Tylko przy dzieleniu przez dwumian $(x-a)$

$w(x) = 2x^2 - 5x - 12$ podziel przez dwumian $x-4$

a		2	-5	-12
↙	4	2	$4 \cdot 2 + (-5) = 3$	$4 \cdot 3 + (-12) = 0$

Twierdzenia:

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w
wtedy i tylko wtedy,
gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$

Przykładowe zadanie:

Czy wielomian $w(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ jest podzielny przez dwumian $x-2$?

$$\begin{aligned} w(2) &= 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 10 = \\ &= 8 + 8 - 6 - 10 = 0 \end{aligned}$$

zatem wielomian w jest
podzielny przez $x-2$,
ponieważ jest równy 0

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia $w(x)$ przez $(x-a)$, to $w(a)=r$

$$w(x) = (x-a) \cdot b(x) + r$$

$$w(a) = (a-a) \cdot b(x) + r = r$$

Przydaje to się w zadaniach gdzie mamy policzyć resztę bez wykonywania obliczeń np;

$w(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ podziel przez $(x+2)$

$$w(-2) = -16 + 12 + 2 + 5 = 3$$

więc reszta = 3

Pierwiastki wielomianów

Całkowite

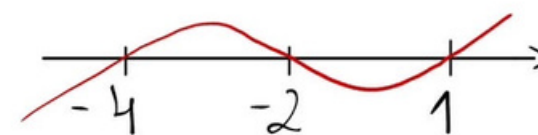
Jeśli wielomian ma pierwiastki całkowite to są one
dzielnikami wyrazu wolnego
przykładowe zadanie :rozwiąż równanie

$$\begin{aligned}x+3x-9x+5&=0 \\(x+5)(x-2x+1)&=0 \\(x+5)(x-1)&=0 \\x=-5 \quad x=1\end{aligned}$$

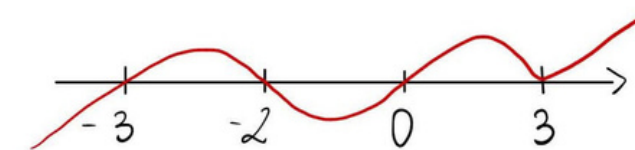
Znajdujemy dzielnik 5 gdzie
równanie będzie równe 0
następnie dzielimy wielomian
przez te liczby używając Hornera

Wielokrotne

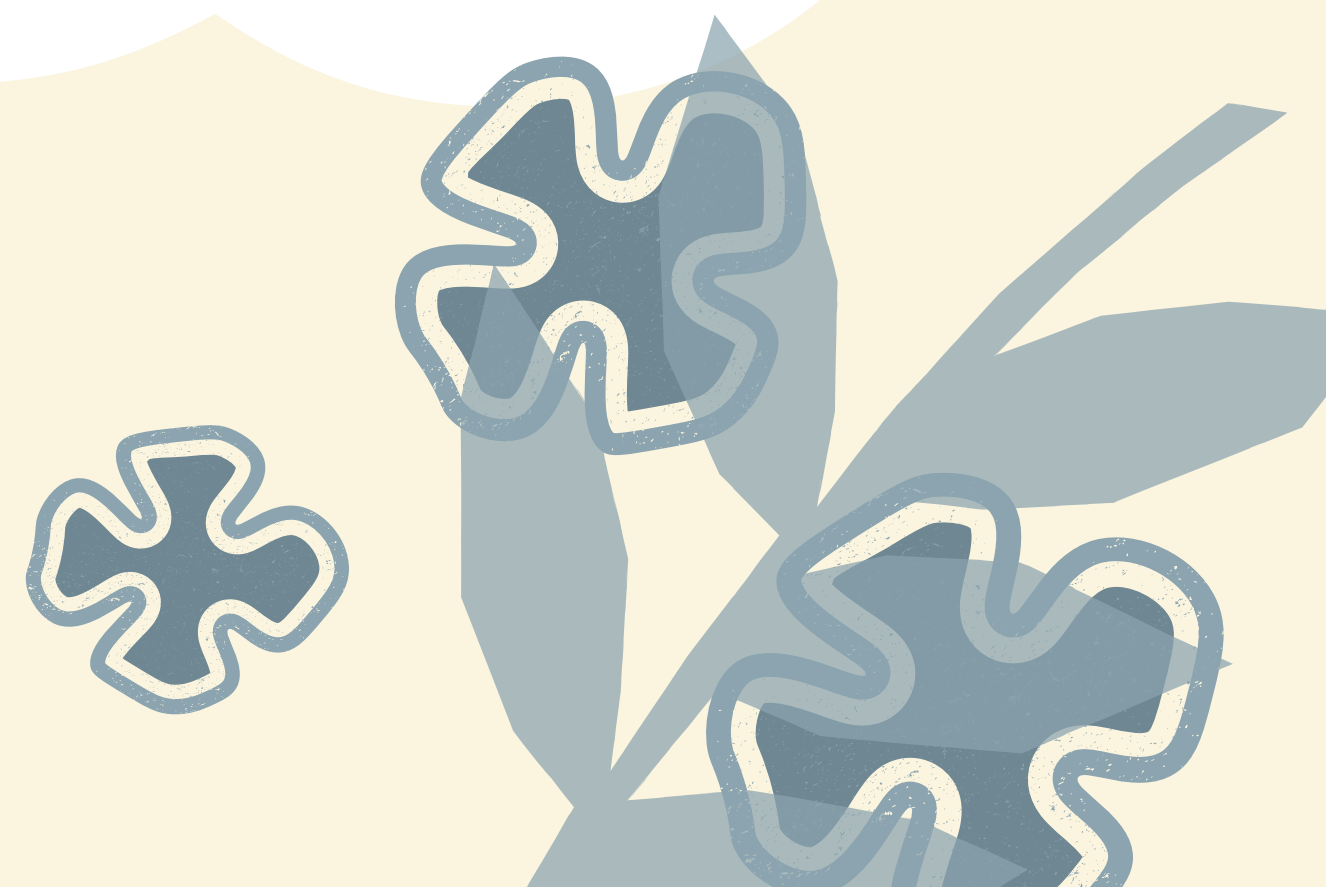
$$\begin{aligned}\omega(x) &= (x-1)(x+2)(x+4) \\x &= 1 \quad x = -2 \quad x = -4\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\omega(x) &= x^3(x-3)^2(x+2)(x+3) \\x &= 0 \quad x = 3 \quad x = -2 \quad x = -3 \\&\text{3-krotność} \quad \text{2-krotność}\end{aligned}$$



Jeśli krotność jest parzysta
odbijamy od osi x



Nierówności wielomianowe

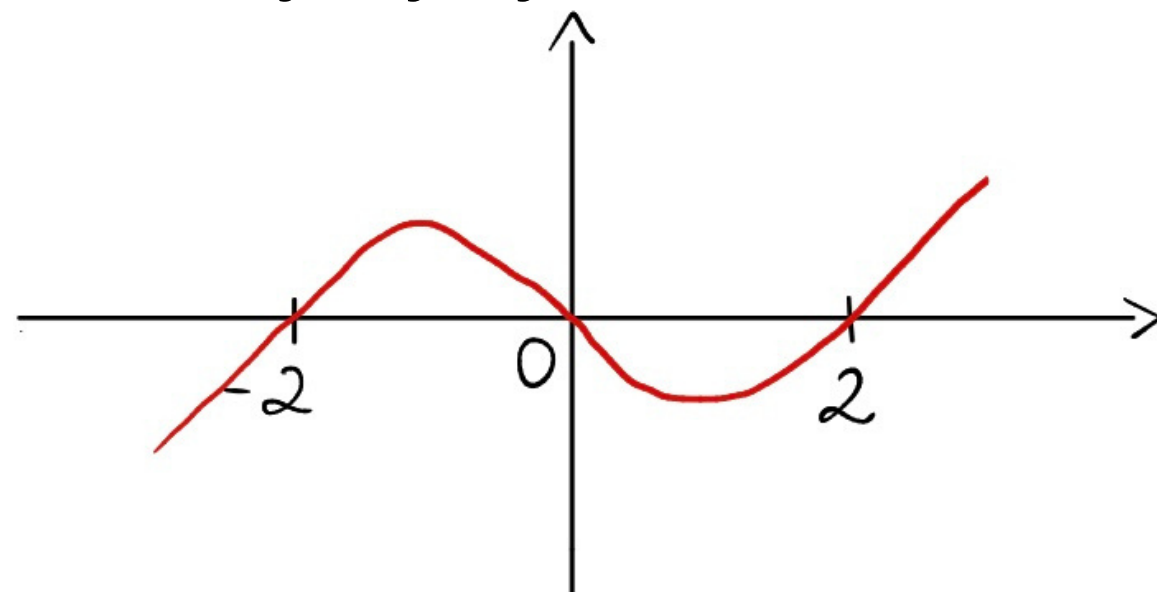
$$x^3 - 4x > 0$$

Rozkładamy wielomian na czynniki:

$$w(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

$$x=0 \quad x=2 \quad x=-2$$

Szkicujemy wykres wielomianu:



x należy do $(-2, 0)$ u $(2, \infty)$

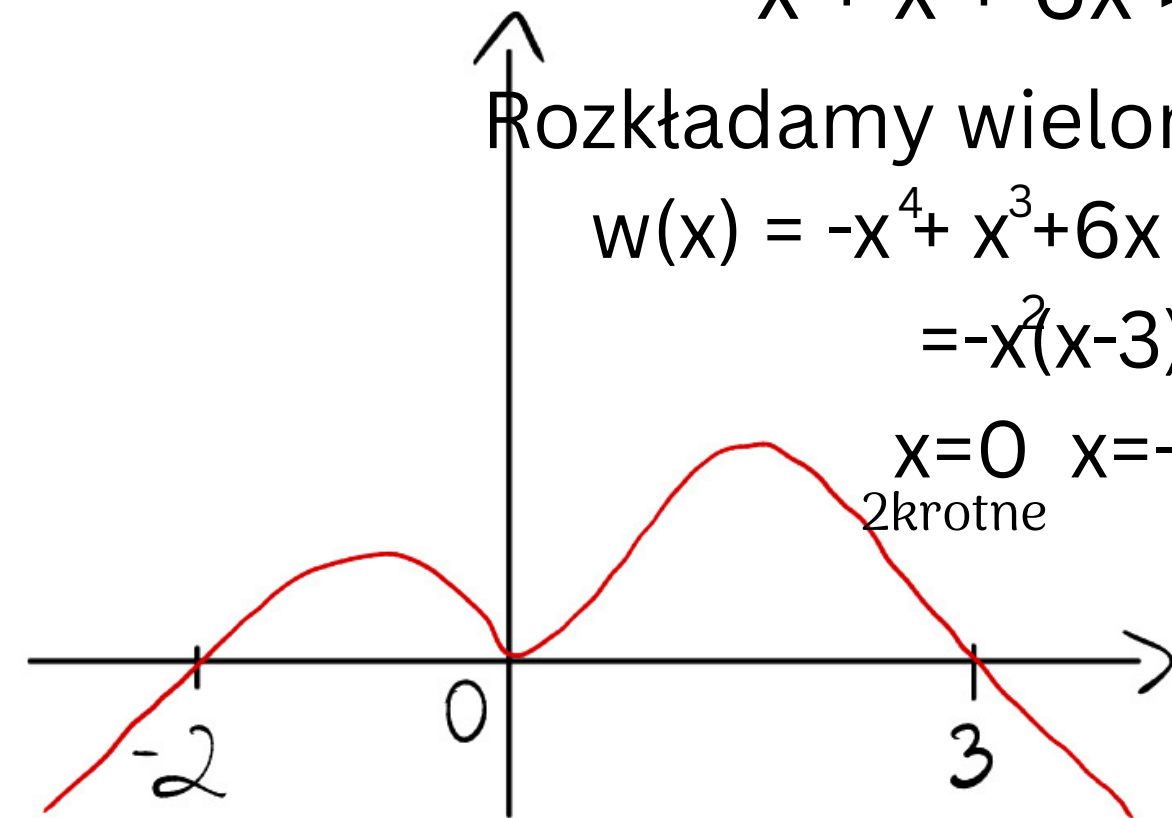
$$-x^4 + x^3 + 6x^2 > 0$$

Rozkładamy wielomian na czynniki:

$$\begin{aligned} w(x) &= -x^4 + x^3 + 6x^2 = -x^2(x^2 - x - 6) = \\ &= -x^2(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

$$x=0 \quad x=-2 \quad x=3$$

2krotne



x należy do $(-2, 0)$ u $(0, 3)$

Dziękujemy za uwagę