

Wielomiany

1. Czym jest wielomian?

wielomian to wyrażenie algebraiczne złożone z:

- liczb (współczynników)
- zmiennej (np. x)
- potęg o **naturalnych wykładnikach**

Postać ogólna wielomianu

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ gdzie } a_n \neq 0$$

2. Stopień i współczynniki

- stopień wielomianu - najwyższa potęga zmiennej
- współczynniki - liczby stojące przy potęgach x

Przykład:

$$W(x) = 4x^5 - x^3 + 7$$

- stopień: 5
- współczynniki: 4, -1, 7

3. Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

4. Równania wielomianowe

Równanie wielomianowe to równanie postaci: $W(x) = 0$

Rozwiązaniami są liczby, dla których wielomian przyjmuje wartość zero - nazywamy je **pierwiastkami**

Sposoby rozkładania:

- wyłączenie wspólnego czynnika
- użycie wzorów skróconego mnożenia
- grupowanie wyrazów
- schemat Hornera

$$\begin{aligned} \text{np. } 6x^2 + 9x &= 0 \\ 3x(2x+3) &= 0 \\ \underline{x=0} \quad \vee \quad \underline{2x+3=0} \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

5. Rozkład wielomianu na czynniki

Rozkład polega na zapisaniu wielomianu jako iloczynu prostszych wyrażeń

Najczęstsze metody

wyciąganie wspólnego
czynnika przed nawias

$$\begin{aligned} \text{wielomian: } 6x^2 + 9x \\ \text{wspólny czynnik: } 3x \\ \text{rozkład: } 6x^2 + 9x &= 3x(2x+3) \end{aligned}$$

grupowanie wyrazów

$$\begin{aligned} \text{wielomian: } x^3 + x^2 + 2x + 2 \\ \text{grupujemy: } (x^3 + x^2) + (2x + 2) \\ \text{wyciągamy wspólny czynnik 2} \\ \text{każdej grupy: } x^2(x+1) + 2(x+1) \\ \text{rozkład końcowy: } (x^2+2)(x+1) \end{aligned}$$

korzystanie ze wzorów
skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} \text{wielomian: } x^2 - 9 \\ \text{wzór: } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ \text{rozkład: } x^2 - 9 &= (x-3)(x+3) \end{aligned}$$

6. Dzielenie wielomianów

Wielomiany można dzielić na dwa sposoby:

- ① schematem Hornera (szybka metoda)
- ② dzieleniem pisemnym ("pod kreską")

$$P(x) = (2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) : (x+1)$$

①

	2	3	-2	-3
-1	2	5	3	0

← tu zapisujemy współczynniki wielomianu

Mnożenie →
Dodawanie →
Wpisyujemy wynik

ponieważ dzielimy
przez $x+1$, to $a=-1$

otrzymamy wielomian to: $2x^2 + x - 3$

Jeśli reszta z dzielenia wynosi 0,
to liczba, przez którą dzielimy, jest
pierwiastkiem wielomianu

②

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 3 \\ (2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) : (x+1) \\ \underline{-2x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 2x \\ \underline{-x^2 - x} \\ -3x - 3 \\ \underline{+3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

0 ← reszta

7. Równość wielomianów

dane są dwa wielomiany:

$$W_1(x) = ax^2 + 3x - 1$$

$$W_2(x) = 2x^2 + bx - 1$$

→ aby wielomiany były równe, ich współczynniki przy tych samych potęgach muszą być **talże same**

Porównujemy współczynniki:

- przy x^2 : $a = 2$
 - przy x : $3 = b$
 - wyraz wolny: $-1 = -1$
- odpowiedź:** $a = 2, b = 3$

8. Wykres wielomianu

$$W(x) = x^2(x+3)(x-4)(x-7)^3$$

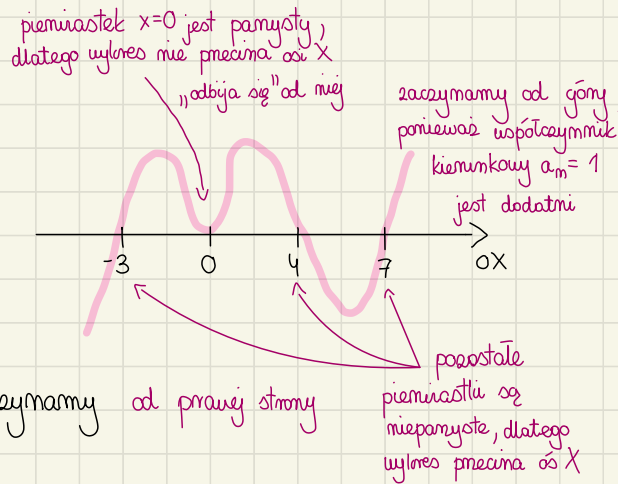
wyznaczamy miejsca zerowe:

$$x = 0 \vee x = -3 \vee x = 4 \vee x = 7$$

określamy krotności tych pierwiastków

$x = 0$	$x = -3$	$x = 4$	$x = 7$
2-krotny	1-krotny	1-krotny	3-krotny

Rysowanie wykresu wielomianu zawsze zaczynamy od prawej strony



9. Twierdzenie o reszcie z dzielenia

Twierdzenie o reszcie mówi, że

Jeżeli wielomian $W(x)$ dzielimy przez dwumian $(x-a)$, to reszta z tego dzielenia jest równa wartości $W(a)$

Oznacza to, że:

Jeżeli $W(a) = 0$, to reszta z dzielenia wynosi 0

10. Twierdzenie Bézouta

Twierdzenie Bézouta jest ściśle związane z twierdzeniem o reszcie

Jeżeli $W(a) = 0$, to dwumian $(x-a)$ jest czynnikiem wielomianu $W(x)$

Oznacza to, że:

- liczba a jest pierwiastkiem wielomianu,
- wielomian dzieli się przez $(x-a)$ bez reszty