

Wielomiany - powtórzenie

Konstancja Hernecka i Hania
Marynowicz 2a



Stopień i współczynnik wielomianów:

- **Jednomianem stopnia n** nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie a należy do rzeczywistych z wyłączeniem $\{0\}$ i należy do naturalnych +
- **Jednomianem stopnia 0** jest funkcja stała $y=a$, gdzie a nie jest równe 0.
- Funkcja $y=0$ jest **jednomianem zerowym**, nie określamy stopnia
- a - **współczynnik** wielomianu
- Funkcja zmiennej rzeczywistej - wzór:
$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$
- a_n nie równa się zero i należy do naturalnych + - **wielomian** stopnia n
- Jednomian w stopnia 0 to **wielomian stopnia 0**.
- Jednomian zerowy – **wielomian zerowy**.
- Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.
- Liczby $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.
- Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Dodawanie wielomianów

- DODAWANIE

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Zad.1 Wyznacz sumę wielomianów

$$\omega(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad i \quad u(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$\omega(x) + u(x)$

$$(2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) =$$

$$= 2x^4 + \underline{9x^3} - \underline{6x^2} + \underline{3x} - 5 - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - \underline{x} =$$

$$= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5$$

Odejmowanie wielomianów

- ODEJMOWANIE

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem

Zad.2 Wyznacz różnicę wielomianów

$$w(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3 \quad \text{i} \quad u(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$$

$w(x) - u(x)$

$$\begin{aligned} & (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\ & = \underline{6x^4} - \underline{3x^3} - \underline{2x^2} - \underline{3} - \underline{4x^4} - \underline{2x^3} + \underline{x^2} + \underline{5x} = \\ & = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Zmieniamy
znaki
współczynników
wielomianu u

Mnożenie wielomianów

- Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Zad.1 Wyznacz iloczyn wielomianów

$$u(x) = 2x - 3 \quad \text{i} \quad v(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$u(x) \cdot v(x)$$

$$(2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) =$$

$$= 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3x^2 + 6x - 6 =$$
$$= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$$

Skrócone mnożenie - wzór na sześciiany

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

$$\hookrightarrow \underline{(a+b)^2} = a^2 + 2ab + b^2$$

↳ kwadrat sumy

$$\hookrightarrow \underline{(a-b)^2} = a^2 - 2ab + b^2$$

↳ kwadrat różnicy

$$\hookrightarrow \underline{a^2 - b^2} = (a-b)(a+b)$$

↳ różnica kwadratów

$$\hookrightarrow \underline{(a+b)^3} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

↳ sześcián sumy

$$\hookrightarrow \underline{(a-b)^3} = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

↳ sześcián różnicy

$$\hookrightarrow \underline{a^3 + b^3} = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

↳ suma sześciánów

$$\hookrightarrow \underline{a^3 - b^3} = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

↳ różnica sześciánów

Rozkład wielomianu na czynniki

Rozłożyć wielomian na czynniki to znaczy zapisać go jako iloczyn prostszych wyrażeń. Wyróżniamy cztery sposoby rozkładu:

1. Wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias
2. Grupowanie wyrazów
3. Wzory skróconego mnożenia
4. Trójmian kwadratowy

Przykłady:

$$1. 6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$$

$$2. x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2) + (x + 1) = \\ = x^2(x + 1) + 1(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$$

$$3. \begin{aligned} \bullet x^2 - 16 &= (x - 4)(x + 4) \\ \bullet x^2 + 6x + 9 &= (x + 3)^2 \end{aligned}$$

$$4. x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Dzielenie wielomianów

Dzielenie wielomianów wykonujemy dwoma sposobami:

- Metodą pisemną
- Przez schemat Hornera

UWAGA! Schemat Hornera używamy tylko do dzielenia przez dwumian $(x \pm a)$

• $(2x^2 - 5x - 12) : (x - 4) =$

	2	-5	-12
4	2	3	0

tu jest reszta
 $4 \cdot 3 + (-12)$
 $4 \cdot 2 + (-5)$
 przepiszemy dwójkę

	2	-5	-12
4	2	3	0

↓ ↓
 $2x + 3$

$$(2x^2 - 5x - 12) : (x - 4) = 2x + 3$$

• $(6x^3 - 3x^2 - 10x + 9) : (x - 3) =$

	6	-3	-10	9
3	6	15	35	114

↓ ↓ ↓
 $6x^2 + 15x + 35$

$$(6x^3 - 3x^2 - 10x + 9) : (x - 3) =$$

$$= 6x^2 + 15x + 35 \text{ reszta } 114$$

$2x^2 - 5x - 12$	:	$x - 4$
$- 2x^2 + 8x$		
$3x - 12$		
$- 3x + 12$		
$=$		$=$

$$2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$$

Metoda
Pisemna

Pierwiastki wielokrotne wielomianu

Pierwiastek wielokrotny to miejsce zerowe wielomianu, które pojawia się więcej niż raz w rozkładzie na czynniki.

Jeśli w rozkładzie wielomianu na czynniki występuje czynnik $(x - a)^k$ i nie występuje czynnik $(x - a)^{k+1}$ gdzie $k \in \mathbb{N}$ to liczbę a nazywamy pierwiastkiem k -krotnym wielomianu

$$W(x) = x^3 (x + 2)^1 (x - 3)^2$$

Diagram illustrating the roots and their multiplicities from the factorization $W(x) = x^3 (x + 2)^1 (x - 3)^2$:

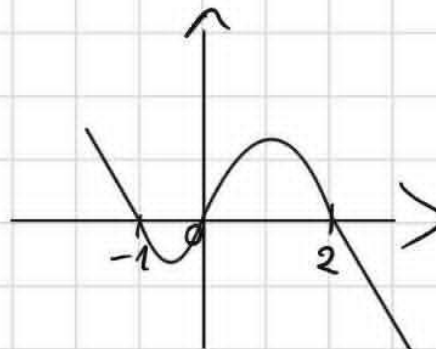
- Root 0 (indicated by a pink arrow from the x^3 term) is a **trzykrotny** (triple) root.
- Root -2 (indicated by a pink arrow from the $(x + 2)^1$ term) is a **jednokrotny** (single) root.
- Root 3 (indicated by a pink arrow from the $(x - 3)^2$ term) is a **dwukrotny** (double) root.

Wykres wielomianu

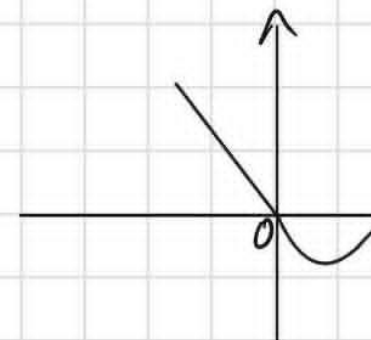
Wielomian zmienia znak gdy pierwiastek ma nieparzystą krotność. Natomiast przy pierwiastkach mających krotność parzystą nie zmienia znaku.

Wykresy wielomianów o ujemnym współczynniku przy najwyższej potędze:

$$y = -x(x+1)(x-2)$$

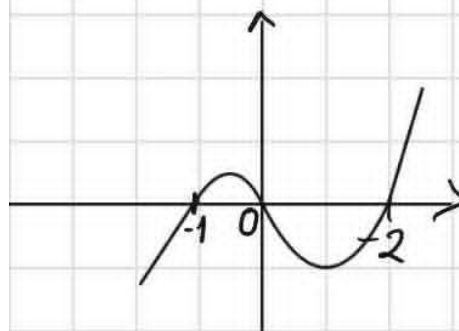


$$y = -x(x-2)$$

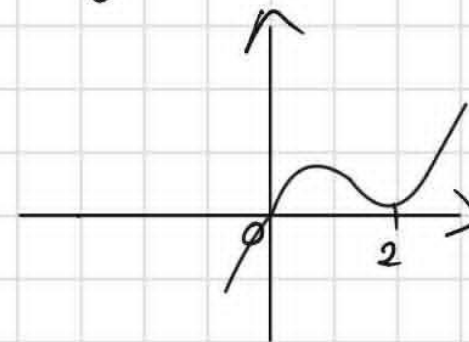


Wykresy wielomianów o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze:

$$y = x(x+1)(x-2)$$

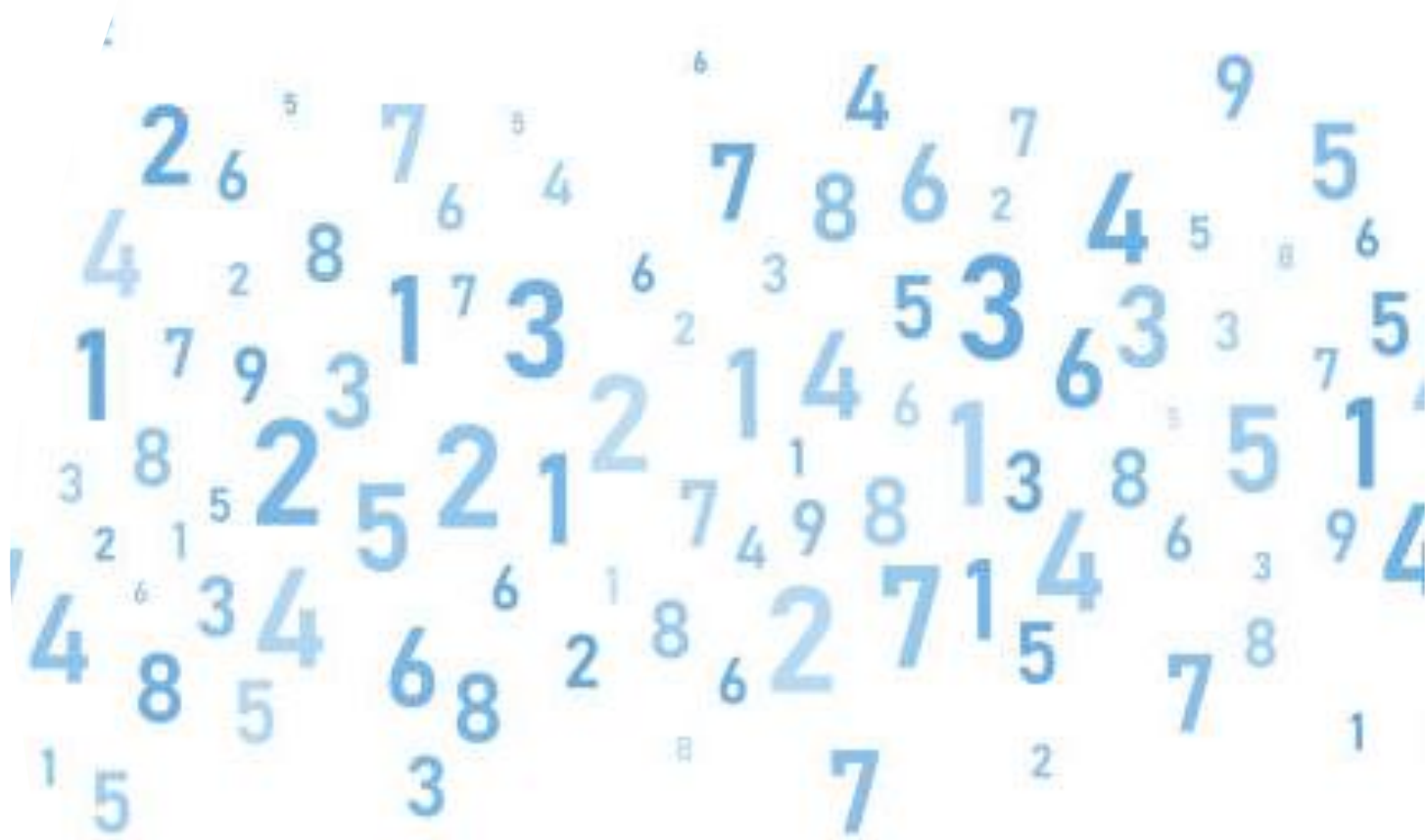


$$y = x(x-2)^2$$



1) Twierdzenie o reszcie i 2) Twierdzenie Bezouta:

- Jeżeli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to: $r = w(a)$
- Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$



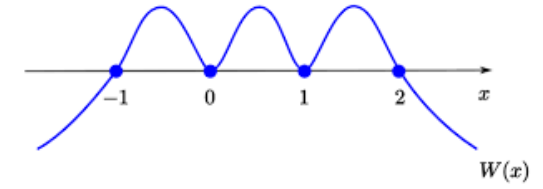
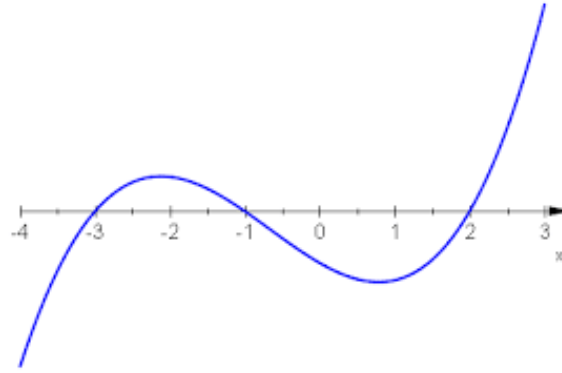
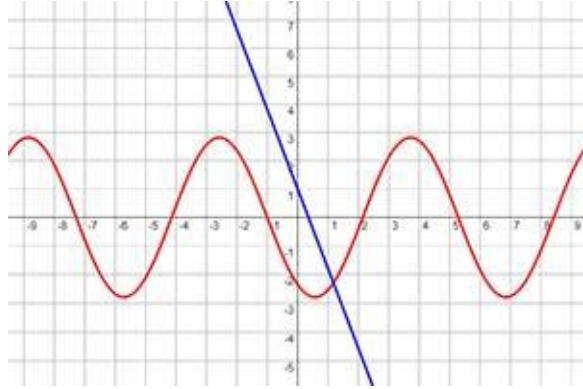
Zastosowanie tw. o reszcie i Bezouta:

Przykład 2: Sprawdzanie podzielności wielomianu

- Zadanie: Sprawdź, czy wielomian $W(x) = x^3 - 7x + 6$ jest podzielny przez dwumian $(x + 3)$.
- Rozwiązanie:
 1. Dzielnik to $(x + 3)$, co można zapisać jako $(x - (-3))$. Zatem sprawdzamy wartość wielomianu dla $a = -3$.
 2. Podstawiamy $a = -3$ do wielomianu $W(x)$:
$$W(-3) = (-3)^3 - 7(-3) + 6$$
 3. Wykonujemy obliczenia:
$$W(-3) = -27 + 21 + 6$$
$$W(-3) = 0$$
- Odpowiedź: Ponieważ $W(-3) = 0$, co oznacza, że reszta z dzielenia jest równa zero, wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x + 3)$. 

Przykład 1: Obliczanie reszty z dzielenia

- Zadanie: Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ przez dwumian $(x - 2)$.
- Rozwiązanie:
 1. Zgodnie z twierdzeniem o reszcie, szukana reszta R jest równa wartości wielomianu $W(x)$ dla $x = 2$ (ponieważ dzielimy przez $x - a$, gdzie $a = 2$).
 2. Podstawiamy $a = 2$ do wielomianu $W(x)$:
$$R = W(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) - 4$$
 3. Wykonujemy obliczenia:
$$R = 8 - 2(4) + 6 - 4$$
$$R = 8 - 8 + 6 - 4$$
$$R = 2$$
- Odpowiedź: Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x - 2)$ wynosi 2. 



Wielomiany wykresy:

- Odbijamy od miejsc zerowych, gdy miejsce zerowe jest pierwiastkiem parzystym, np: 2-krotnym, 4-krotnym.



Dziękujemy za
uwagę!!!!!!

- <https://www.istockphoto.com/pl/search/2/image?mediatype=illustration&phrase>
- <https://www.google.com/search?q=zadanie+przyk%C5%82>
- https://www.google.com/search?q=wielomiany&oq=wielomiany+&gs_lcrp=EgZ