

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję:

$$y = ax^n$$

Wielomianem stopnia n zmiennej x nazywamy funkcję:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie:

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ - to współczynniki liczbowe wielomianu,
 $n \in \mathbb{N}$ - stopień wielomianu + oraz $a_n \neq 0$.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów

$$W(x) = 5x^3 - 7x^2 + 11 \text{ oraz } p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x.$$

$$W(x) + p(x) = 7x^3 - x^2 - 4x + 11$$

$$W(x) = 5x^3 - 7x^2 + 11 \text{ oraz } p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x$$

$$W(x) - p(x) = 3x^3 - 13x^2 + 4x + 11$$

Schemat Hornera

Schemat Hornera wykorzystujemy do dzielenia wielomianu przez dwumian liniowy $(x-a)$.

Cała metoda jest podobna do dzielenia pisemnego wielomianów.

$$w(x) = 3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 1x - 5$$

	3	0	-2	1	-5
-2	a	b	c	d	reszta

Miejsce zerowe
(x+2)

$$w(x) = (x+2)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + \text{reszta}$$

Wynik dzielenia

Wzory skróconego mnożenia

$$\text{Sześciąt sumy: } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{Sześciąt różnicy: } (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{Suma sześciatów: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{Różnica sześciatów: } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Mnożenie i dzielenie wielomianów

Żeby obliczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz jednego wielomianu, przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

$$w(x) = 2x+1 \text{ oraz } v(x) = x^2 - 3x + 4$$

$$W(x) \cdot v(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 4$$

Dzielenie pisemne wielomianów: $(3x^3 - 5x^2 - 2x) : (x^2 - 2x)$

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ (3x^3-5x^2-2x) : (x^2-2x) \\ \underline{-3x^3+6x^2} \\ 9x^2-2x \\ \underline{-9x^2+18x} \\ 10x-2 \\ \underline{-10x+20} \\ 18 \end{array}$$

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x-a$, to $w(a)=r$.

dzielenie $W(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 3$ przez $p(x) = (x-2)$

$$w(x) = p(x)(x-2) + r$$

Dla $x=2$ mamy $W(2) = p(2) \cdot (2-2) + r = 0 + r = r$

Zatem szukana reszta to:

$$r = W(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 13$$

Twierdzenie Bézouta

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Czy wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x-2$?

Z twierdzenia Bézouta wiemy, że wielomian

$W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-2)$

wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$W(2) = 0$$

$$2^5 - 2 \cdot 2^4 + 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 2 = 0$$

$$32 - 32 + 8 - 12 + 2 + 2 = 0$$

$$0 = 0$$

Nierówności

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 9 < 0$$

$$x^2(x+3) - 3(x+3) < 0$$

$$(x^2 - 3)(x+3) < 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x+3) < 0$$

szkicujemy funkcję zaczynając od prawej jeśli

$a > 0$ to od góry jeśli $a < 0$ to z dołu

x należy do $(-\infty, -3) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Równania

Równaniem wielomianowym nazywamy równanie, które można zapisać w postaci:

$$w(x) = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$2x^2(x + 3/2) + 4(x + 3/2) = 0$$

$$(2x^2 + 4)(x + 3/2) = 0$$

$$2(x^2 + 2)(x + 3/2) = 0$$

$$x_0 = -3/2$$

Rozkład wielomianu na czynniki

Rozkładem wielomianu na czynniki nazywamy zapisanie jego wzoru w postaci iloczynu wielomianów.

Taki sposób zapisu wielomianu nazywamy postacią iloczynową.

$$W(x) = 5x^3 + 10x^2 + 2x + 4$$

$$W(x) = 5x^2(x+2) + 2(x+2)$$

$$W(x) = (5x^2 + 2)(x+2)$$