



# Wielomiany



Wielomianem nazywamy funkcję w postaci:

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$   
gdzie  $n \in \mathbb{N}$  - stopień wielomianu,  $a_n \neq 0$   
 $a_n, a_{n-1}, \dots$  - współczynniki wielomianu  
 $a_0$  - wyraz wolny

Suma współczynników wynosi  $W(1)$   
np.  $W(x) = (2x-1)^{2025}$   
 $W(1) = 1$

## Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$



## Mnożenie i dzielenie

Aby pomnożyć wielomian  $W(x)$  i wielomian  $P(x)$  należy pomnożyć każdy wyraz z 1 wielomianu przez każdy wyraz z 2 wielomianu

$$W(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 \quad P(x) = 3x^2 + 2x$$

$$W(x) \cdot P(x) = (2x^4 - 5x^3 + 3x^2) \cdot (3x^2 + 2x)$$

$$\begin{array}{r} 3x - 4 \\ (3x^2 - x - 4) : (x+1) \\ - 3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych

## Rozkład wielomianu na czynniki

Jest to przedstawienie wielomianu jako iloczynu dwóch lub więcej wielomianów. Pozwala nam uprościć skomplikowane wyrażenia, łatwiej rozwiązywać równania i analizować wykresy funkcji.



np.  
 $W(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 15$  1. grupujemy  
 $W(x) = 2x^2(x-3) + 5(x-3)$  2. wyłaczamy ten sam czynnik  
 $W(x) = (2x^2 + 5)(x-3)$

## Twierdzenie o reszcie - wykorzystanie

1. Z zadania wynika, że:

$$W(-3) = 6$$

$$W(2) = 1$$

Zapiszmy więc  $W(x)$

$$W(x) = (x+3)(x-2)u(x) + r$$

2. Reszta z dzielenia przez wielomian stopnia 2

ma postać liniową:  $r = ax + b$

$$W(x) = (x+3)(x-2)u(x) + ax + b$$

4. Korzystamy z twierdzenia o reszcie i dzielimy

$$W(-3) = -3a + b$$

$$W(2) = 2a + b$$

5. Z warunków mamy, że  $W(-3) = 6$  i  $W(2) = 1$  - podstawiamy to do równań i tworzymy z tego układ równań:

$$\begin{cases} -3a + b = 6 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

6. Obliczamy i podstawiamy pod  $r$ :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow r = -x + 3$$

## Dodawanie i odejmowanie

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem

$$W(x) + P(x)$$

$$W(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad P(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3$$

$$W(x) + P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 3x - 8$$

Aby odjąć od wielomianu  $W(x)$  wielomian  $P(x)$  należy zamienić wszystkie znaki na przeciwne w wielomianie  $P(x)$  a potem je do siebie dodać i zredukować wyrazy podobne

$$W(x) + [-P(x)]$$

$$W(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad P(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3$$

$$W(x) - P(x) = 2x^4 + 12x^3 - 8x^2 + 6x - 2$$

## Schemat Hornera

Tylko do dzielenia przez dwumian  $(x-a)$

$$W(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1 : (x-1)$$

| $a_n$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 3     | 2     | -5    | 4     | 1     |
| 1     | 3     | 5     | 0     | 4     | 5     |

reszta

$$p(x) = 3x^3 + 5x^2 + 4$$

i reszta 5

## Twierdzenie o reszcie

Jeśli  $r$  jest reszta z dzielenia  $W(x)$  przez  $(x-a)$ , to  $W(a) = r$

$$1. W(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3 \quad P(x) = x - 3$$

$$r = W(3) = 27 - 18 - 6 - 3 = 0$$

$$2. W(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 \quad P(x) = x + 1$$

$$r = W(-1) = -1$$

## Twierdzenie Bézouta

Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x) \Leftrightarrow$ , gdy wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $(x-a)$

Rozwiązujemy równanie  $2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$  wiedząc, że 1 jest pierwiastkiem wielomianu stojącego po lewej stronie.

1. Zgodnie z twierdzeniem Bézouta skoro 1 jest pierwiastkiem  $W(x)$  to  $W(x)$  jest podzielny przez  $(x-1)$  czyli  $W(x) = P(x) \cdot (x-1) = 0$

2. Dzielimy  $W(x)$  przez  $(x-1)$  sposobem Hornera:

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} 2 & -3 & 4 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & & \end{array}$$

$$P(x) = 2x^2 - x + 3$$

$$W(x) = (2x^2 - x + 3)(x-1)$$

3. Rozwiązujemy równanie

$$(2x^2 - x + 3)(x-1) = 0$$

$$\Delta < 0 \quad x = 1 \quad \text{Odp: } x = 1$$

## Nierówności

1. Rozwiązujemy nierówność:

$$-x^3 + 2x^2 + 4x \leq 0$$

$$-x(x^2 - 2x - 4) \leq 0 \quad \Delta = 20$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{5} \quad x_2 = 1 + \sqrt{5}$$

$$-x(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$$

$$-x(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5}) \leq 0$$

$$x = 0 \wedge x = 1 - \sqrt{5} \wedge x = 1 + \sqrt{5}$$

Podsumowanie:

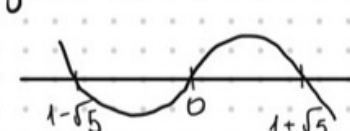
W zależności od znaku przy wszystkich  $x$  zaczynamy rysować od dołu - gdy ich suma jest ujemna lub od góry gdy jest dodatnia.

Gdy pierwiastki mają parzystą krotność to „wężyk odbija się” a gdy nieparzystą to przechodzi przez oś.

Rysujemy wykres:

a) zaznaczamy pierwiastki

b) rysujemy „wężyk” zaczynając albo od góry, albo od dołu w zależności od współczynnika przy  $x$  w naszym przypadku współczynnik wynosi -1



w tym przypadku nie mamy pierwiastków 2-krotnych więc „wężyk” się nie odbija (jeżeli są to pierwiastki 3-krotne nie odbija się).

$$x \in [1 - \sqrt{5}, 0] \cup [1 + \sqrt{5}, \infty)$$

## Równania

W równaniach doprowadzamy wielomian do najprostszej postaci, umożliwiającej nam wyznaczenie  $x$  (ich ilość zależy od przykładu)

$$\rightarrow W(x) = 0$$

czyli szukamy takich  $x$ , dla których wielomian jest równy zero.

$$2x^3 - 9x^2 - 5x = 0 \quad \Delta = 121$$

$$x(2x^2 - 9x - 5) = 0 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2x(x-5)(x+\frac{1}{2}) = 0$$

$$x = 0 \wedge x = 5 \wedge x = -\frac{1}{2}$$

## Pierwiastki całkowite wielomianu

W przypadku gdy nie możemy rozłożyć na czynniki lub pogrupować

Aby znaleźć pierwiastki całkowite równania o współczynnikach całkowitych możemy znaleźć dzielniki wyrazu wolnego dla którego  $W(x) = 0$

$$\text{Rozwiązujemy równanie: } x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

1. Szukamy dzielników:  $\pm 1$  i  $\pm 5$

2. Sprawdzamy dla którego dzielnika wartość  $W(x)$  będzie równa 0

$$W(1) = 1 + 3 - 9 + 5 = 0 \Rightarrow 1 \text{ jest pierwiastkiem}$$

$$\text{wielomianu, czyli } W(x) = P(x)(x-1)$$

3. Hornerem dzielimy wielomian  $W(x)$  przez  $(x-1)$

$$\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 1 & 3 & -9 & 5 & P(x) = x^2 + 4x - 5 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 0 & W(x) = (x^2 + 4x - 5)(x-1) \end{array}$$

4. Rozwiązujemy równanie

$$(x^2 + 4x - 5)(x-1) = 0$$

$$\Delta = 36; \quad x_1 = -5 \wedge x_2 = 1$$

$$(x+5)(x-1)(x-1) = 0$$

$$(x+5)(x-1)^2 = 0$$

$$x = -5 \wedge x = 1$$

## Pierwiastki wielokrotne wielomianu

Podaj pierwiastki wielomianu  $W$  i określ krotności każdego z nich

$$W(x) = x^3(x+2)(x-3)^2$$

$x=0$  3-krotny  
 $x=-2$  1-krotny  
 $x=3$  2-krotny

