

FUNKCJA KWADRATOWA

=trójmian kwadratowy

$$y = ax^2 + bx + c$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

! c-punkt przecięcia z osią OY
! oś symetrii: $x = p$ (x wierzchołka)

Postać ogólna: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

Postać kanoniczna: $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a, p, q \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 \xrightarrow{T[p;q]} f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Przykłady funkcji

$a > 0$

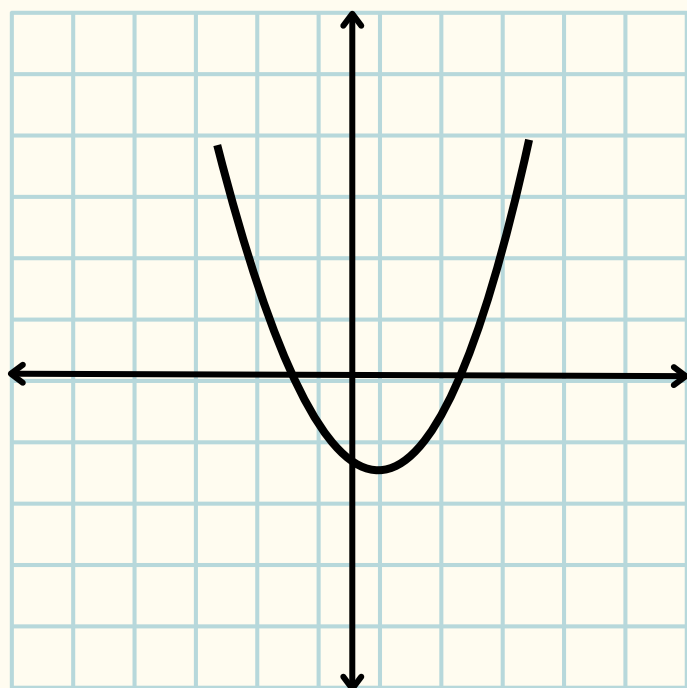
$$x = p(x_w)$$

$$y_{\min} = q(y_w)$$

$f \searrow$ dla $x \in (-\infty; p]$

$f \nearrow$ dla $x \in [p; \infty)$

ZW: $y \in [q; \infty)$



$a < 0$

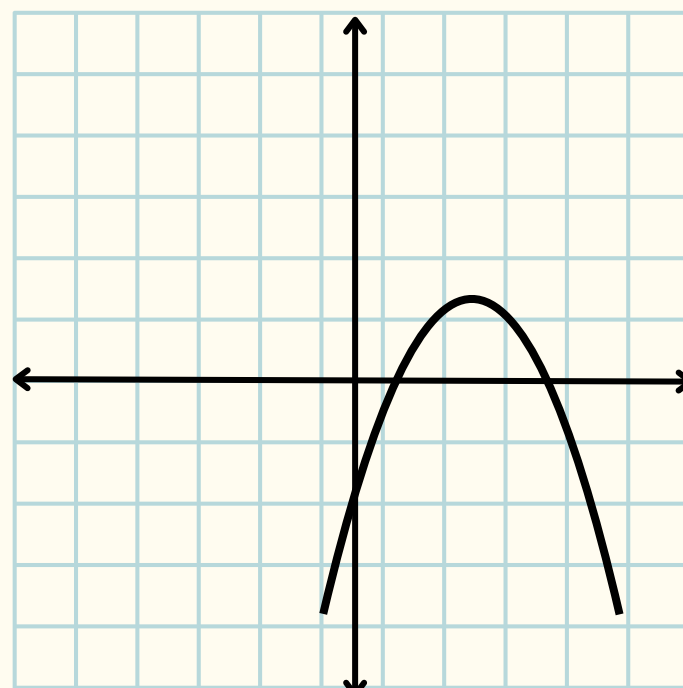
$$x = p(x_w)$$

$$y_{\max} = q(y_w)$$

$f \nearrow$ dla $x \in (-\infty; p]$

$f \searrow$ dla $x \in [p; \infty)$

ZW: $y \in (-\infty; q]$



Δ (delta)

→ Wyróżnik Δ (delta) trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, to liczba:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Miejsca zerowe

→ Miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, to rozwiązania rzeczywiste równania kwadratowego:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$W = (p; q)$

→ Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = (p; q)$, gdzie:

$$p = -b/2a$$

$$q = -\Delta/4a$$

Równanie
 $a \neq 0$
 $ax^2 + bx + c = 0$ ma:

dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

gdy $\Delta > 0$

jeden pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

gdy $\Delta = 0$

zero pierwiastków:

gdy $\Delta < 0$

**Postać iloczynowa f.
kwadratowej**

$a \neq 0$
 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

gdy $\Delta > 0$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

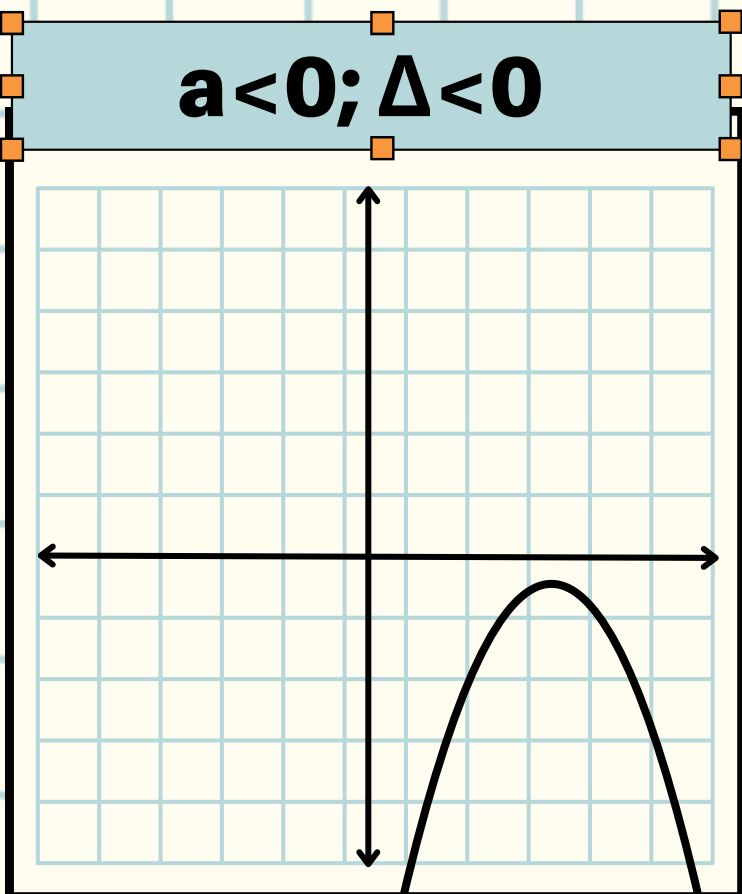
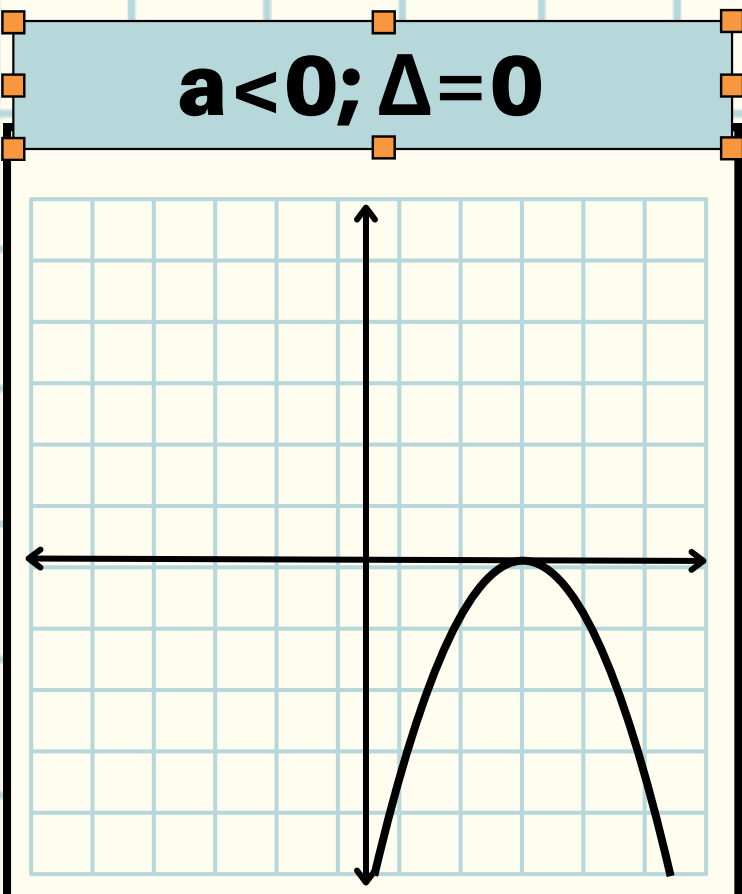
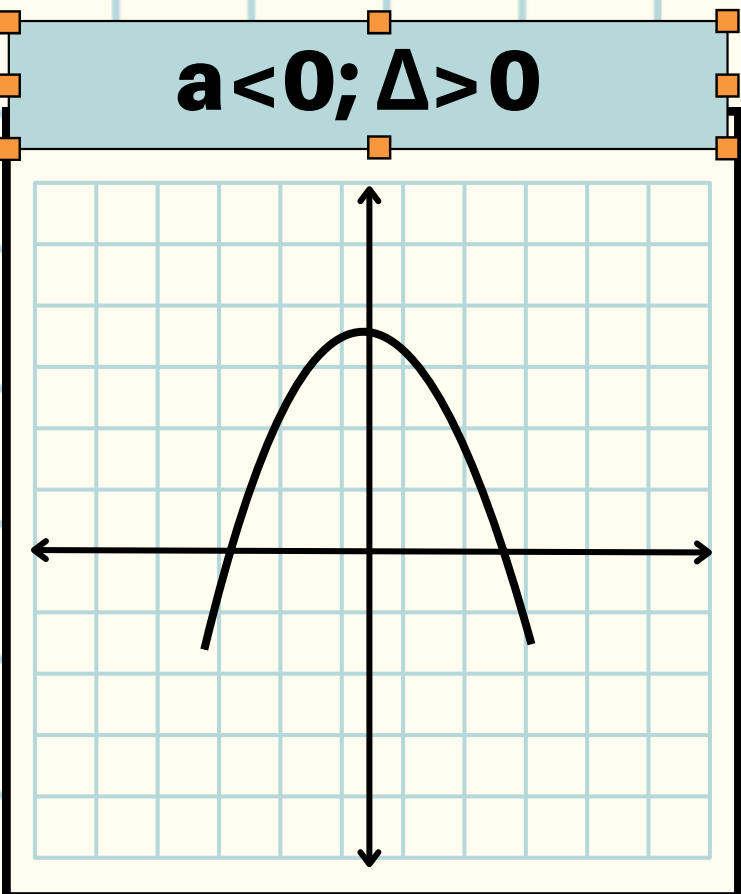
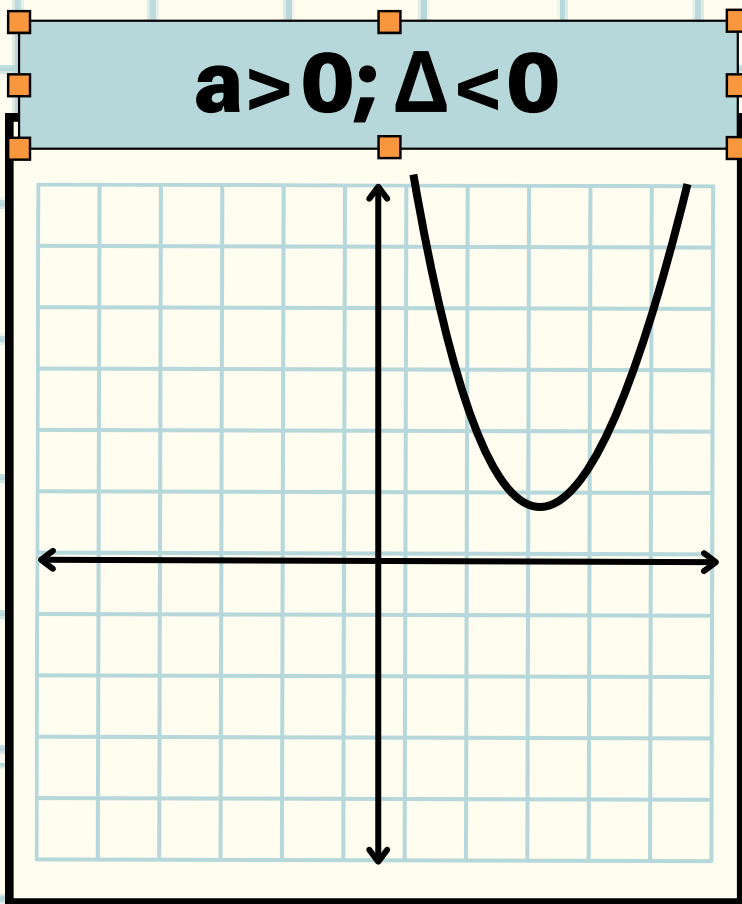
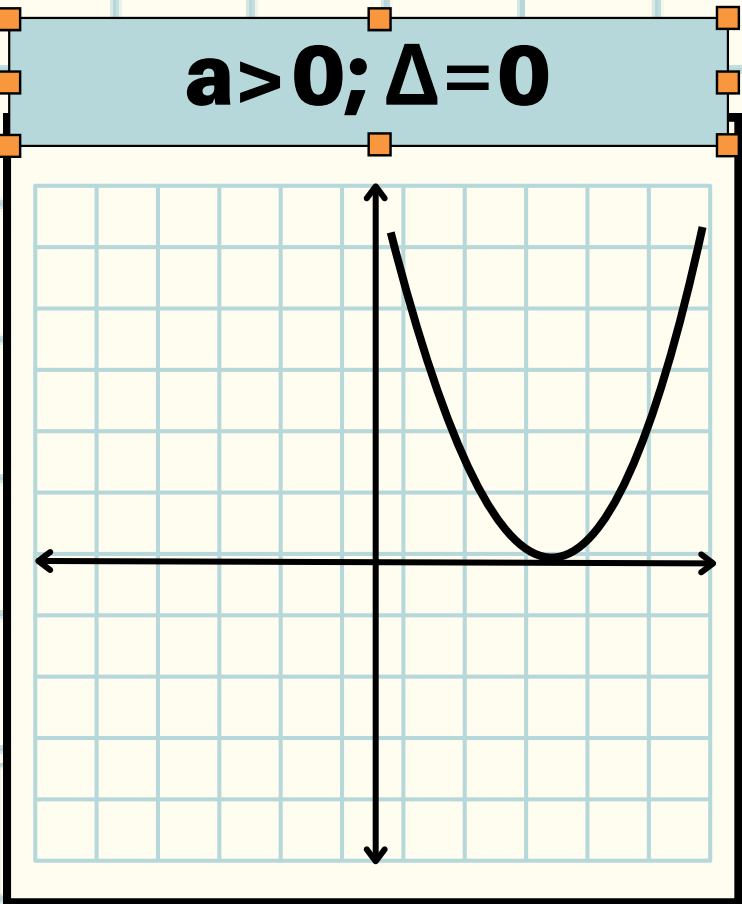
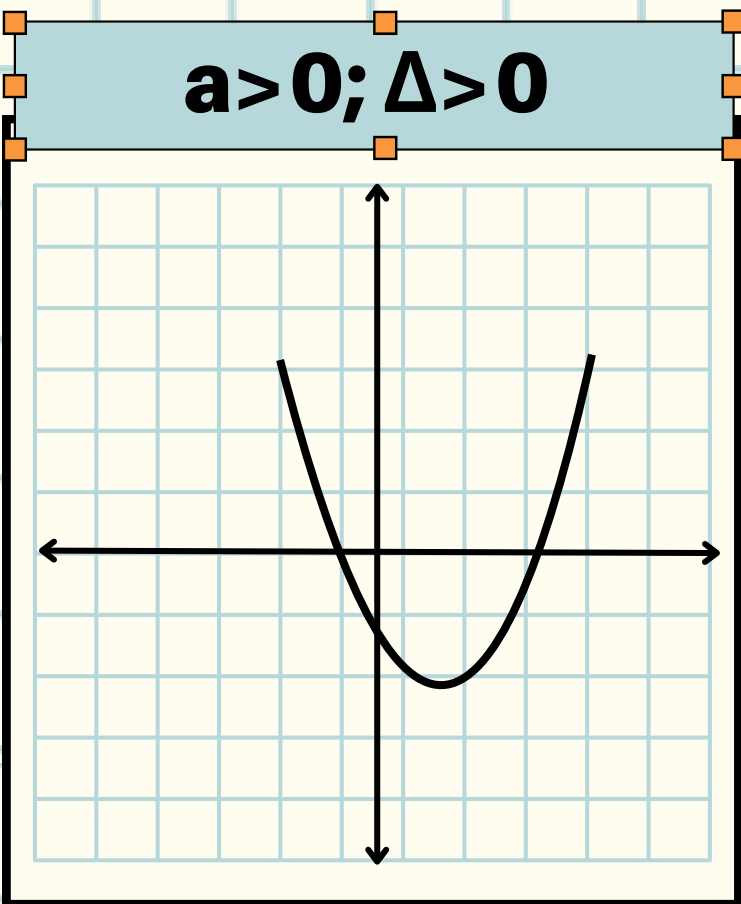
gdy $\Delta = 0$

$$y = a(x - x_0)^2$$

gdy $\Delta < 0$

nie ma postaci
iloczynowej

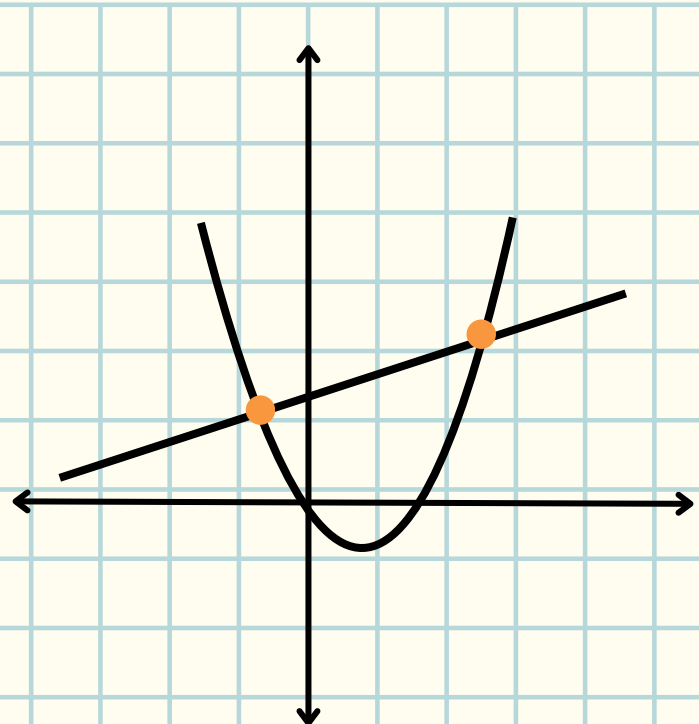
$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$



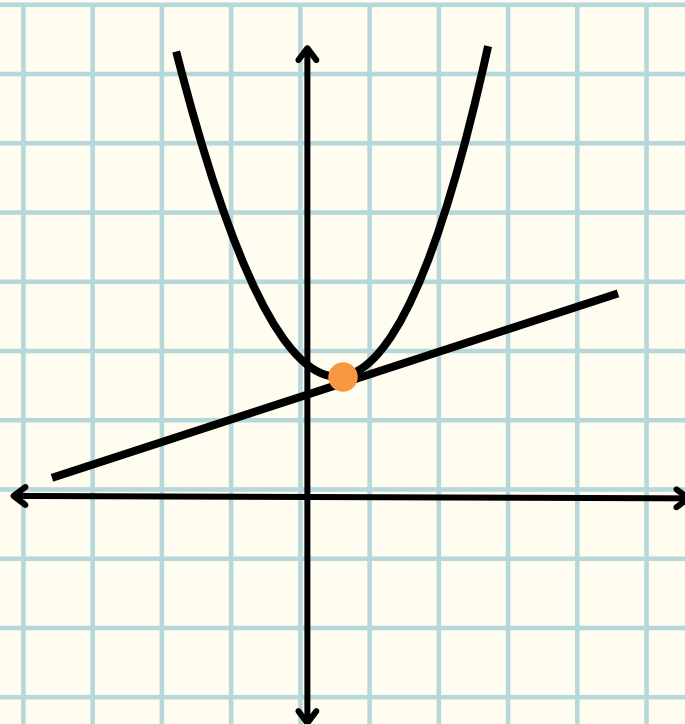
Układy równań:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=ax+b \end{cases}$$

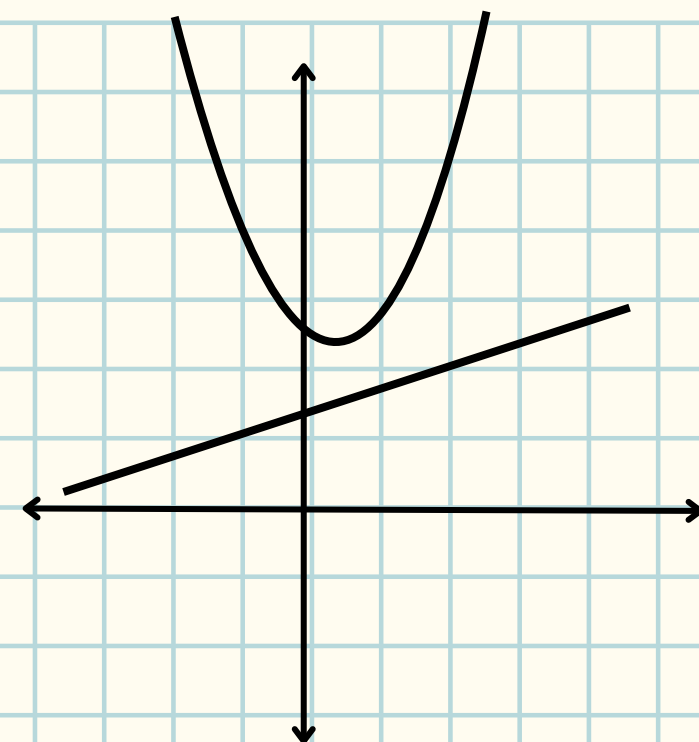
2 rozwiązania



1 rozwiązanie



0 rozwiązań



Nierówności:

Rozwiązanie nierówności kwadratowych składa się z następujących etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania
- naszkicowanie paraboli
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności

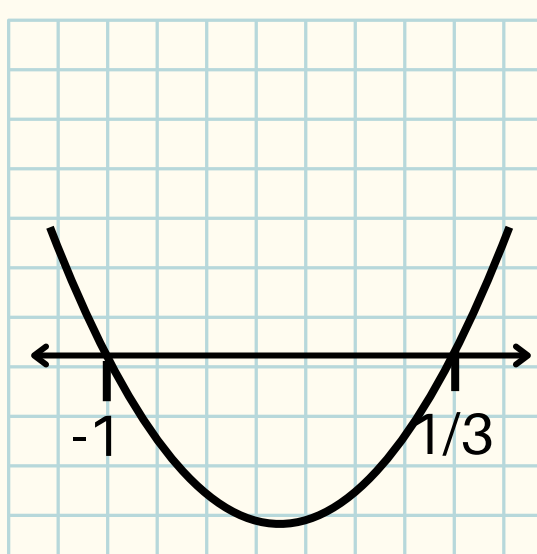
Przykład:

Rozwiąż nierówność: $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

1. $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)$
 $\Delta = 4 + 12 = 16$

2. $x_1 = -2 - \sqrt{16} / 2 \cdot 3$ $x_2 = -2 + \sqrt{16} / 2 \cdot 3$
 $x_1 = -2 - 4/6$ $x_2 = -2 + 4/6$
 $x_1 = -1$ $x_2 = 1/3$

3.



4. $x \in [-1; 1/3]$

Rozwiązanie równań gdy:

są wszystkie
współczynniki:

1. $ax^2 + bx + c = 0$
2. $\Delta = \dots$
3. $x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$

nie ma współczynnika
c:

1. $ax^2 + bx = 0$
2. $x(ax + b) = 0$
3. $x = 0$ v $ax + b = 0$

nie ma współczynnika
b:

- np. $ax^2 + c = 0$
1. $3x^2 - 1 = 0$
 2. $(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1) = 0$
 3. $\sqrt{3}x - 1 = 0$ v $\sqrt{3}x + 1 = 0$

WZORY VIETE'A

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to zachodzą wzory:

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

Wzory Viete'a

++

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

--

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

+-

$$x_1 \cdot x_2 < 0$$

STOSOWANIE

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 =$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{\Delta}{a^2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-b}{a} \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

Np. $x^2 + 3x - 4$

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{1} = -3$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{1} = -4$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{25}{1^2} = \frac{25}{1} = 25$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-4)}{1^2} = \frac{9 + 8}{1} = \frac{17}{1} = 17$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{3^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-4)}{(-4)^2} = \frac{9 + 8}{16} = \frac{17}{16}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

RÓWNANIA SPROWADZALNE DO RÓWNAŃ KWADRATOWYCH

$$ax^4+bx^2+c=0$$

$$\downarrow$$

$$x^2=t$$

$$\downarrow$$

$$at^2+bt+c=0$$

$$ax^6+bx^3+c=0$$

$$\downarrow$$

$$x^3=t$$

$$\downarrow$$

$$at^2+bt+c=0$$

$$ax^2+b|x|+c=0$$

$$\downarrow$$

$$|x|=t$$

$$\downarrow$$

$$at^2+bt+c=0$$

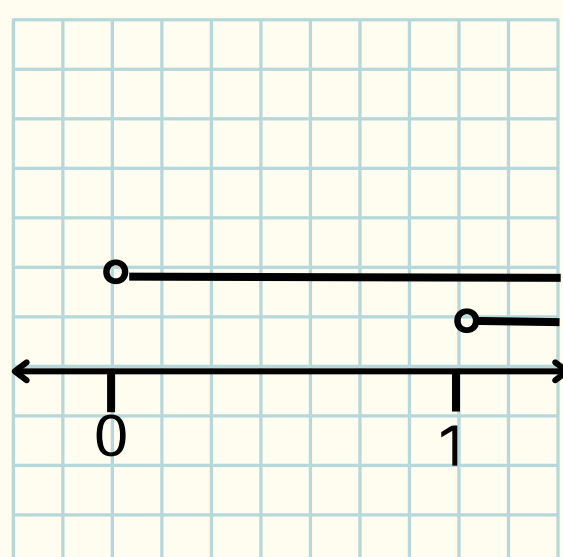
ZADANIA Z PARAMETRAMI

Dla jakich wartości parametru k funkcja nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

$$kx^2+2(k-1)x+k-1>0$$

$$1^\circ \begin{cases} \Delta < 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

$$1^\circ \wedge 2^\circ$$



$$k \in (1; \infty)$$

ad.1

$$\Delta = (2k-2)^2 - 4k^2 + 4$$

$$\Delta = 4k^2 - 8k + 4 - 4k^2 + 4k + 4 = -4k + 4$$

$$-4k + 4 < 0 \quad -4k < -4 \quad k > 1$$

Naszkicuj wykres funkcji $y=f(m)$, która każdemu argumentowi $m \in \mathbb{R}$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania

$$(m-1)x^2+2x+m-1=0$$

1° przypadek liniowy

$$m-1=0 \quad m=1$$



$$2x=0 \rightarrow 1 \text{ rozw.}$$

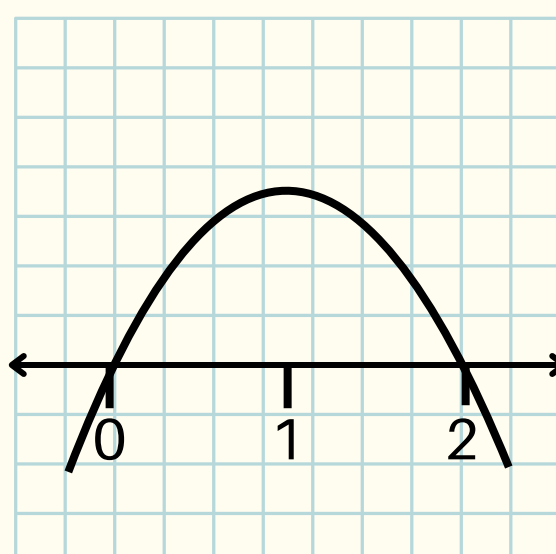


$$\text{dla } m=1 \rightarrow 1 \text{ rozw.}$$

2° $m \neq 1$

$$\Delta = -4m^2 + 8m$$

$$\Delta = -4m(m-2)$$



$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (0; 2) \setminus \{1\}$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m \in \{0; 2\}$$

$$m \in (0; 2) \setminus \{1\} \rightarrow 2 \text{ rozw.}$$

$$m \in \{0; 2\} \rightarrow 1 \text{ rozw.}$$

$$m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty) \rightarrow 0 \text{ rozw.}$$

liczba rozw.

