

NOTEBOOK



Funkcja kwadratowa

nazywana
też trójmianem
kwadratowym

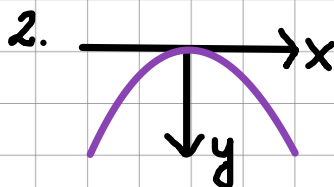
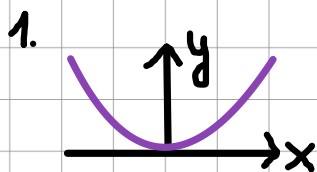
Własności:

- podstawową postacią funkcji kwadratowej (nazywanej parabola) jest:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

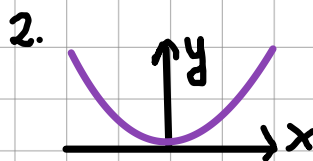
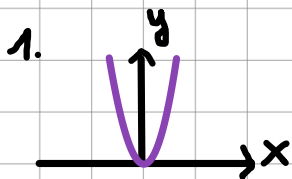
- ramiona są skierowane w górę lub w dół w zależności od współczynnika a .
Jeśli $a > 0$, wtedy ramiona są skierowane w górę. Jeśli $a < 0$, wtedy ramiona są skierowane w dół.

1. $a > 0$
2. $a < 0$



- Współczynnik a decyduje o tym, jak bardzo rozchylone są ramiona paraboli. Im mniejsze jest a , tym ramiona są bardziej rozchylone, a im większe, tym mniej rozchylone.

1. $a = 4$
2. $a = 1/4$



- wierzchołek paraboli $y = ax^2 + bx + c$ ma współrzędne:

$$W \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Δ nazywamy
wyróżnikiem
trójmianu
kwadratowego
(delta)

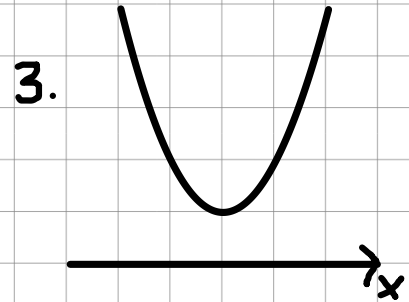
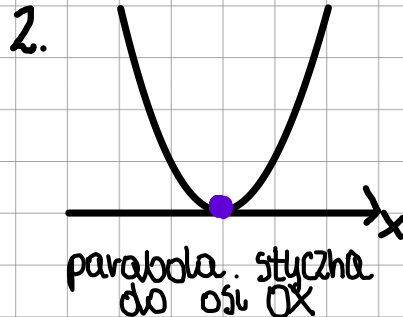
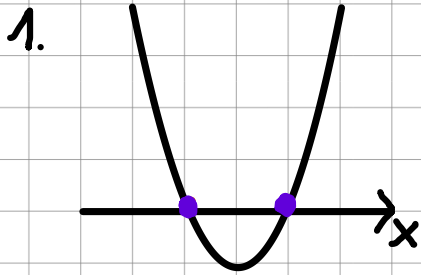
- parabola jest symetryczna względem prostej:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

jest to współrzędna x wierzchołka

• liczba miejsc zerowych funkcji ($f(x)=0$) zależy od delty:

1. $\Delta > 0$ - dwa miejsca zerowe
2. $\Delta = 0$ - jedno miejsce zerowe
3. $\Delta < 0$ - brak miejsc zerowych



Wykres funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $[p, q]$.

Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt (p, q) . Jej osią jest prosta $x = p$.

POSTAĆ: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. nazywamy postacią ogólną funkcji kwadratowej.

POSTAĆ: $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. nazywamy postacią kanoniczną funkcji kwadratowej.

Współrzędne wierzchołka możemy także wyliczyć korzystając z własności $y_w = f(x_w)$.

Równanie kwadratowe

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ to miejsca zerowe funkcji $y = ax^2 + bx + c$

Równanie $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ma:

- dwa pierwiastki, jeśli $\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

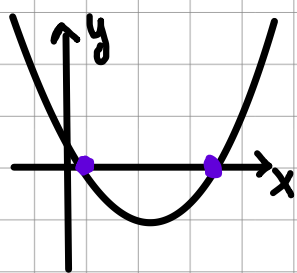
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeden pierwiastek, jeśli $\Delta = 0$:

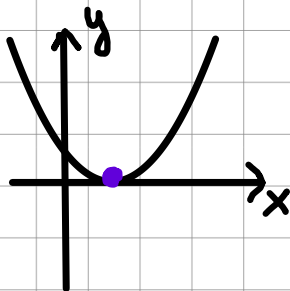
$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- nie ma pierwiastków, jeśli $\Delta < 0$

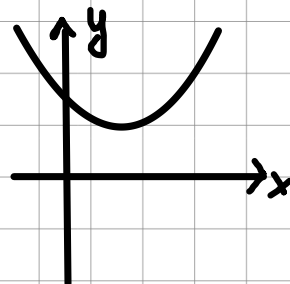
Interpretacja geometryczna



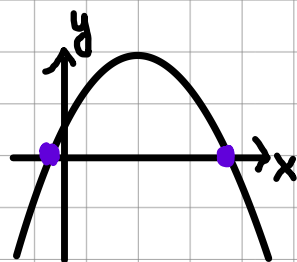
$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$



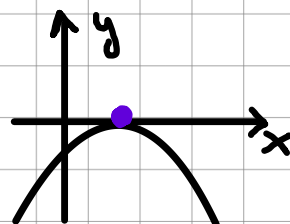
$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$



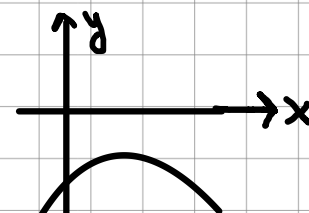
$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

postać iloczynowa

Postać $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, gdzie $a \neq 0$ nazywamy postacią iloczynową funkcji kwadratowej. Przedstawienie wzoru f.k. w postaci iloczynowej nazywamy również rozkładem na czynniki liniowe.

Trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$:

- możemy przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu, jeśli $\Delta > 0$
- możemy przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x-x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem tego trójmianu, jeśli $\Delta = 0$
- nie możemy rozłożyć na czynniki liniowe (przedstawić w postaci iloczynowej), jeśli $\Delta < 0$

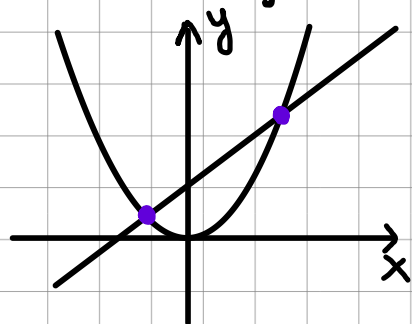
Współrzędna x wierzchołka jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych

$$y = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$$

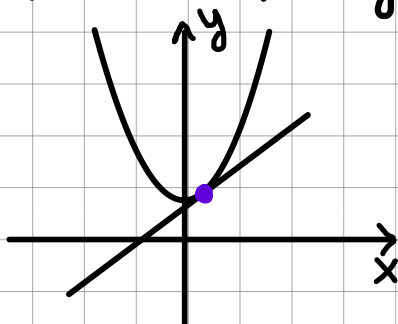
$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

układy równań

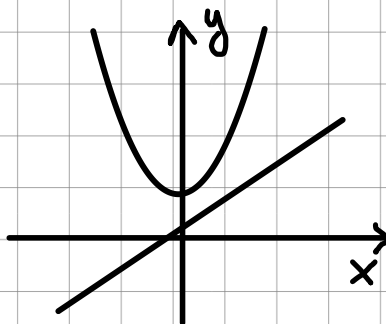
Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć wcale.



2 punkty wspólne
- dwa rozwiązania



1 punkt wspólny
- jedno rozwiązanie



0 punktów wspólnych
- brak rozwiązań

Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy sieczną paraboli. Prosta, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy styczną do paraboli.

Wzory Viète'a

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Możemy je stosować jedynie wtedy, gdy $\Delta \geq 0$

Liczy x_1, x_2 są dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

Liczy x_1, x_2 są ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Liczy x_1, x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$