

FUNKCJA KWADRATOWA

Lena Głowacka
Alicja Krepka
Helena Szychowska
Mavyia Visotskaya
Karol Rogaczewski

Wprowadzenie do funkcji kwadratowej

Funkcję kwadratową nazywamy też trójmianem kwadratowym.

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ - postać ogólna

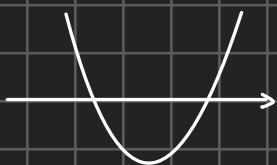
2. $f(x) = a(x-p)^2 + q$ - postać kanoniczna

3. $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ - postać iloczynowa

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

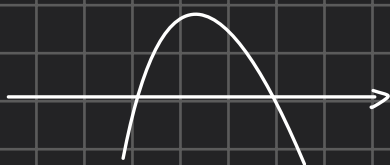
wyrażnik trójmianu kwadratowego

$a > 0$



ramiona skierowane
do góry

$a < 0$



ramiona skierowane
do dołu

$a = 0$

funkcja jest
funkcją liniową

Jeśli mamy miejsca zerowe, możemy policzyć oś symetrii ze wzoru:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

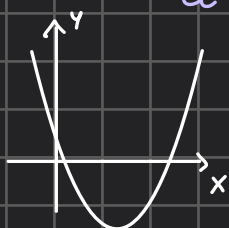
$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (\text{jest to jednocześnie współrzędna } x \text{ wierzchołka})$$

WIERZCHOŁEK

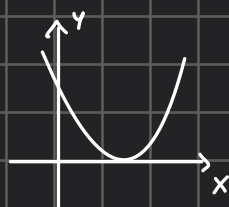
$$x_w = p = \frac{-b}{2a}$$

$$y_w = q = \frac{-\Delta}{4a}$$

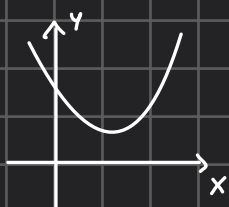
$a > 0$



$\Delta > 0$
dwa pierwiastki

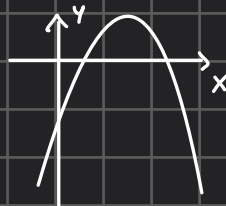


$\Delta = 0$
jeden pierwiastek

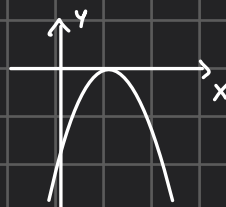


$\Delta < 0$
brak pierwiastków

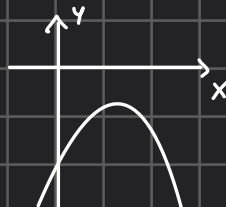
$a < 0$



$\Delta > 0$
dwa pierwiastki



$\Delta = 0$
jeden pierwiastek



$\Delta < 0$
brak pierwiastków

Równania kwadratowe

- $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0 \Rightarrow$ równanie ma jeden pierwiastek:

$$x_w = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ równanie nie ma pierwiastków

Postać iloczynowa

postać iloczynowa: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, $a \neq 0$, x_1, x_2 - m. zerowe

Twierdzenie:

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

- $\Delta > 0 \Rightarrow y = a(x - x_1)(x - x_2)$

- $\Delta = 0 \Rightarrow y = a(x - x_0)^2$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ nie ma postaci iloczynowej

Nierówności kwadratowe

- $x^2 - 5x - 14 > 0$

1) Liczymy m. zerowe funkcji

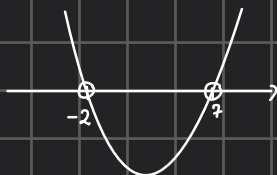
$$\Delta = b^2 - 4ac = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 9}{2} = -2$$

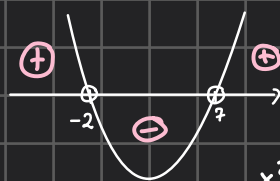
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 9}{2} = 7$$

2) zaznaczamy m. zer. i
rysujemy parabolę



parabola ma ramiona skierowane
do góry, ponieważ współczynnik
kierunkowy jest dodatni.

3) wyznaczamy przedział
zgodnie ze znakiem
nierówności



$$x^2 - 5x - 14 > 0$$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (7, \infty)$$

Równania kwadratowe - powtórzenie

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, oraz jego wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$

1) Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek podwójny:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

3) Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków

Iloczyn czynników jest równy zero, gdy któryś z nich jest równy zero

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można przedstawić w postaci iloczynowej

Przykład:

$$y = 2x^2 - x - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$$

$$25 > 0 \rightarrow \Delta > 0$$

to oznacza że
ma 2 pierwiastki

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{2 \cdot 2} = -1 \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}$$

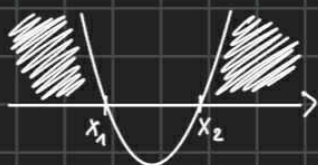
postać iloczynowa trójmianu: $y = 2(x + 1)(x - \frac{3}{2})$

1.2 Nierówności kwadratowe - powtórzenie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

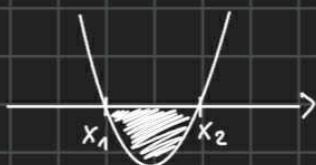
- 1) rozwiązanie odpowiedniego równania
- 2) naskicowanie odpowiedniej paraboli
- 3) odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności

$$a > 0, f(x) > 0$$



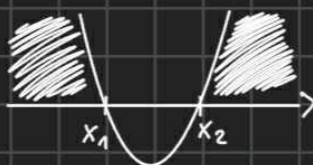
$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$$

$$a > 0, f(x) < 0$$



$$x \in (x_1, x_2)$$

$$a > 0, f(x) \geq 0$$



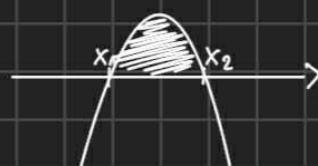
$$x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$$

$$a > 0, f(x) \leq 0$$



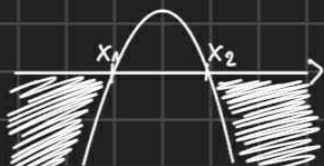
$$x \in [x_1, x_2]$$

$$a < 0, f(x) > 0$$



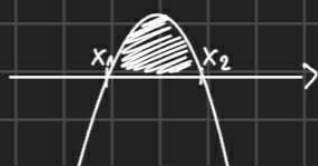
$$x \in (x_1, x_2)$$

$$a < 0, f(x) < 0$$



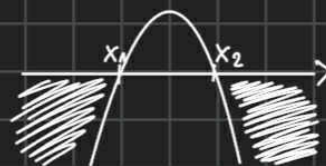
$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$$

$$a < 0, f(x) \geq 0$$



$$x \in [x_1, x_2]$$

$$a < 0, f(x) \leq 0$$



$$x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$$

Przykład:

$$2x^2 + 7x - 4 > 0$$

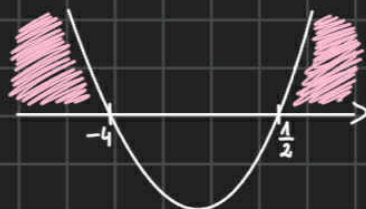
$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$x_1 = \frac{-7-9}{4} = -4$$

$$x_2 = \frac{-7+9}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ \Delta > 0 \end{array} \right\}$$



$$x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$$

1.3 Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Równanie postaci $ax^4+bx^2+c=0$, gdzie $a,b,c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy równaniem dwukwadratowym. Aby je rozwiązać, wprowadzamy niewiadomą pomocniczą $t=x^2$ ($t \geq 0$). Zauważ, że wówczas $x^4=(x^2)^2=t^2$, zatem otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2+bt+c=0$

Przykład:

Rozwiąż: $x^4-10x^2+9=0$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ x^2=t \quad t^2-10t+9=0 \end{array}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 36 = 64$$
$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$t_1 = \frac{10-8}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{10+8}{2} = 9$$

$$\begin{array}{ccccccc} x^2=1 & \vee & x^2=9 \\ \boxed{x=-1} & \vee & x=1 & \vee & x=3 & \vee & x=-3 \end{array}$$

$$(x^2-3)^2 = (2x^2-1)(x^2-3)$$

$$x^4-6x^2+9 = 2x^4-6x^2-x^2+3$$

$$-x^4+x^2+6=0$$

$$x^4-x^2-6=0$$

$$x^2=t$$

$$t^2-t-6=0$$

$$\Delta = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$t_1 = 3$$

$$x^2 = 3$$

$$x_1 = \sqrt{3}$$

$$x_2 = -\sqrt{3}$$

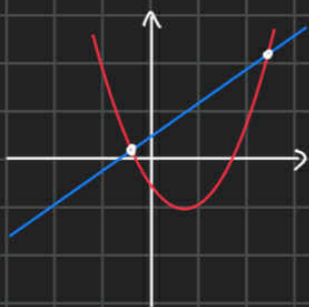
$$t_2 = -2$$

$$\vee \quad x^2 = -2$$

$\vee$ sprzeczność

1.4 Układy równań

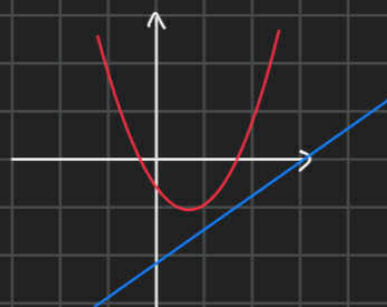
Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



2 rozwiąz.



1 rozwiąz.



0 rozwiąz.

Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **seczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi Ox i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład:

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ y=x^2-4x+4 \end{cases} \rightarrow y=(x-2)^2 \quad W=(2,0)$$

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ y=x^2-4x+4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$$x^2-4x+4=-x+4$$

$$x^2-3x=0$$

$$\Delta=9 \quad \sqrt{\Delta}=3$$

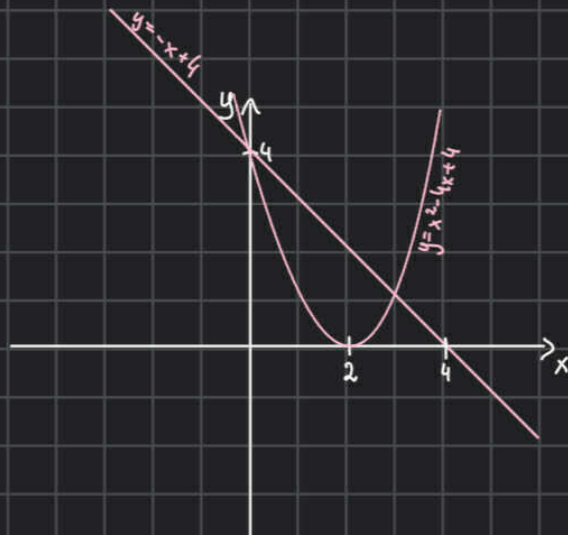
$$x_1=\frac{3-3}{2}=0$$

$$x_2=\frac{3+3}{2}=3$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0 \rightarrow (x-0)(x-3)$$

$$x_1=0 \quad x_2=3$$



Wzory Viète'a

TW:

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to:

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dowód: $x_1+x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

iloczyn analogicznie

cka

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0, \quad x_2 < 0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 < 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 > 0, \quad x_2 < 0$$

$$x_1 \cdot x_2 < 0$$

$$(x_1+x_2 > 0 \vee x_1+x_2 < 0)$$

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

Ważne, żeby pamiętać o wypisaniu warunków z treści zadania.

Np. $\Delta > 0$, gdy mamy mieć dwa pierwiastki lub $\Delta \geq 0$ gdy mamy mieć co najmniej jeden pierwiastek.

Przykład:

Dla jakich wartości parametru m każde z dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$ jest większe od 3?

$$x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$$

$$\Delta = 36m^2 - 8 + 8m - 36m^2 = 8m - 8$$

$$\begin{cases} 1^\circ \Delta > 0 \\ 2^\circ \begin{cases} x_1 > 3 \\ x_2 > 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 8m - 8 > 0$$

$$8m > 8$$

$$1^\circ \underline{\underline{m > 1}}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 > 0 \\ x_2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3 + x_2 - 3 > 0 \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{a} x_1 + x_2 > 6 \\ \textcircled{b} x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{a} x_1 + x_2 > 6$$

$$\frac{-b}{a} > 6$$

$$6m > 6$$

$$\underline{\underline{m > 1}}$$

$$\textcircled{b} x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 > 0$$

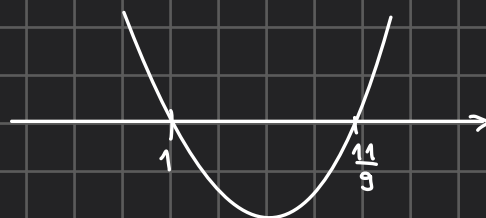
$$2 - 2m + 9m^2 - 3 \cdot 6m + 9 > 0$$

$$9m^2 - 20m + 11 > 0$$

$$\Delta_m = 4$$

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = \frac{11}{9}$$



$$m \in (-\infty, 1) \cup (\frac{11}{9}, \infty)$$

$$\textcircled{a} \wedge \textcircled{b} \Rightarrow m \in (\frac{11}{9}, \infty)$$

$$\text{Odp: } 1^\circ, 2^\circ \underline{\underline{m \in (\frac{11}{9}, \infty)}}$$