

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

WZÓR WIELOMIANU

a_0 to wyraz wolny

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$

Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$

Funkcja $y = 0$ jest jednomianem zerowym, którego stopnia nie określamy.

Liczbę a nazywamy współczynnikiem jednomianu.

Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$ i $n \geq 2$:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1) = a^n - 1$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

! Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x-a$, to:

$$r = w(a)$$

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Rozkład wielomianów na czynniki

$$w(x) = x^7 + 8x^4 = x^4(x^3 + 8) = x^4(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

metoda grupowania:

$\Delta < 0$ nie da się rozłożyć

$$\textcircled{1} w(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = x^2(x-4) + 2(x-4) = (x-4)(x^2+2)$$

$$\textcircled{2} w(x) = x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = \\ = x(x+1)(x-1) - 6(x-1) = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x+3)(x-2)$$

Równania wielomianowe

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2(x-4) = 0$$

$$\begin{array}{lcl} x^2 = 0 & \vee & x - 4 = 0 \\ \underline{x = 0} & \vee & \underline{x = 4} \end{array}$$

$$\textcircled{2} x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$x^3 - x - 2x - 2 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x + 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x+1)(x+1)(x-2) = 0$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Schemat Hornera

$$\textcircled{1} x^3 - 3x - 2 = 0$$

możliwe pierwiastki całkowite:
 $\pm 1, \pm 2$

$$w(1) = 1 - 3 - 2 \neq 0$$

$$\underline{w(-1) = 1 + 3 - 2 = 0}$$

współczynniki

	1	0	-3	-2
-1	1	-1	-2	0

$x^2 - x - 2$

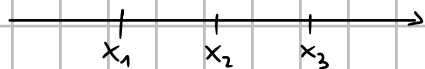
$$\begin{array}{l} -1 \cdot 1 = -1 \\ -1 + 0 = -1 \\ -1 \cdot -1 = 1 \\ 1 - 3 = -2 \\ -1 \cdot -2 = 2 \\ 2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\underline{(x+1)(x^2 - x - 2)}$$

Wykres wielomianu

Aby narysować wykres wielomianu, musimy przedstawić wielomian w postaci iloczynowej

$$w(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...$$



Zaznaczamy na osi miejsca zerowe wielomianu

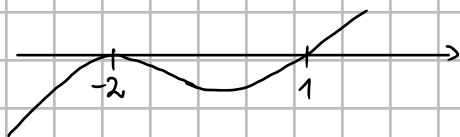
w zależności od znaku przy najwyższej potęgce x rysujemy wężyk:

- od góry gdy +
- od dołu gdy -

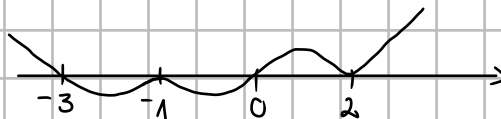
Gdy pierwiastek jest parzyste krotny wykres „odbija się” od osi ox , a gdy jest nieparzyste krotny wykres „przechodzi” przez miejsce zerowe.

Przykłady:

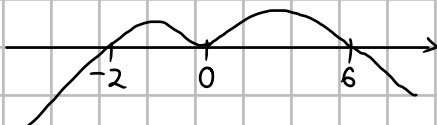
① $w(x) = (x-1)(x+2)^2$



② $w(x) = x(x+3)^5(x-2)^4(x+1)^2$



③ $w(x) = -4x^2(x+2)(x-6)^3$



Nierówności wielomianowe

① $\frac{2x^2-8}{4x-x^2} \leq 0 \quad D: x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$

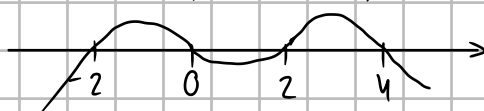
$$\frac{2x^2-8}{-x(x-4)} \leq 0$$

$$2x^2-8 \cdot [-x(x-4)] \leq 0$$

$$2(x^2-4) \cdot [-x(x-4)] \leq 0$$

$$2(x-2)(x+2)[-x(x-4)] \leq 0$$

$$-2x(x-2)(x+2)(x-4) \leq 0$$



$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (4, \infty)$$

Lena Cyboracka 2c
Alicja Krepska