

O wielomianach

Wielomian stopnia n to funkcja postaci

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Stopień wielomianu to najwyższa potęga zmiennej x przy współczynniku różnym od zera.

Liczby $a_n, \dots, a_0$ to współczynniki wielomianu; a_0 nazywamy wyrazem wolnym.

Wśród wielomianów wyróżniamy: Jednomiany (jeden wyraz), dwumiany (suma dwóch jednomianów), trójmiany (suma trzech).

Rozkład wielomianów na czynniki

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

$$w(x) = 12x^5 - 8x^4$$

Wspólnym czynnikiem jest $4x^4$ więc wyłączamy go przed nawias: $4x^4(3x - 2)$

Rozkład trójmianu kwadratowego z deltą.

$$w(x) = 4x^2 + 3x - 1$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{8} = -1, x_2 = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4}$$

$$4(x+1)(x-\frac{1}{4})$$

Stosowanie wzorów skróconego mnożenia.

$$w(x) = x^2 - 16$$

Ponieważ $16 = 4^2$ stosujemy wzór:

$$(x-4)(x+4)$$

Grupowanie wyrazów

$$w(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$$

znajdujemy "pary" wyrazów

$$(x^3 - 4x^2) + (2x - 8)$$

Operacje na wielomianach

Dodawanie i odejmowanie polega na dodawaniu lub odejmowaniu wyrazów o tej samej potędze x .

Aby pomnożyć wielomian każdy wyraz pierwszego wielomianu mnożymy przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Stopień iloczynu jest równy sumie stopni mnożonych wielomianów:

$$st(u \cdot v) = st(u) + st(v).$$

WIELOMIANY

Helena Szychowska,
Karol Rogaczewski,
Maryia Visotskaya

Wzory skróconego mnożenia

Wzory stopnia drugiego (Kwadratowe)

- Kwadrat sumy:
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Kwadrat różnicy:
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Różnica kwadratów:
 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Wzory stopnia trzeciego (Sześcianowe)

- Sześcian sumy:
 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Sześcian różnicy:
 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Suma sześcianów:
 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- Różnica sześcianów:
 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Pierwiastki wielomianu

Jeśli w rozkładzie wielomianu na czynniki występuje czynnik $(x - a)^k$, a nie występuje $(x - a)^{k+1}$, to liczbę a nazywamy pierwiastkiem k -krotnym

Przykład:

W wielomianie $W(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$:

- 0 jest pierwiastkiem trzykrotnym (bo x^3).
- -2 jest pierwiastkiem jednokrotnym (bo $(x + 2)^1$).
- 3 jest pierwiastkiem dwukrotnym (bo $(x - 3)^2$)

Helena Szychowska,
Karol Rogaczewski,
Maryia Visotskaya

Szkicowanie wykresu

- Zaznacz miejsca zerowe na osi OX.
- Ustal krotność pierwiastków:
- Krotność parzysta: Wykres „odbija się” od osi OX w tym punkcie.
- Krotność nieparzysta: Wykres „przechodzi” przez oś OX.
- Określ początek rysowania: Zaczynamy zawsze od prawej strony:
- Jeśli współczynnik przy najwyższej potęgde jest dodatni – zaczynamy od góry.
- Jeśli współczynnik jest ujemny – zaczynamy od dołu.

Dzielenie wielomianów

Można je wykonywać na dwa sposoby:

1. Dzielenie pisemne: Analogiczne do dzielenia liczb, gdzie odejmujemy kolejne iloczyny.
2. Schemat Hornera: Szybka metoda używana wyłącznie przy dzieleniu przez dwumian postaci $(x - a)$. Pozwala łatwo wyznaczyć współczynniki ilorazu oraz resztę.

przykładowy schemat Hornera:

	x^3	x^2	x	wyraz wolny
m. zerowe	1	-4	6	-7
2	1	-2	2	-3
	x^2	x	wyraz wolny	RESZTA

WIELOMIANY

Twierdzenia

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - a)$ to reszta ta jest równa wartości wielomianu dla argumentu a :

$$W(a) = r$$

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$

Pierwiastek wielomianu to rozwiązanie równania $W(x) = 0$

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych posiada pierwiastki całkowite, to są one dzielnikami wyrazu wolnego (a_0)

Wypisz wszystkie dzielniki wyrazu wolnego i sprawdzaj po kolei (używając $W(x) = 0$), który z nich jest pierwiastkiem