

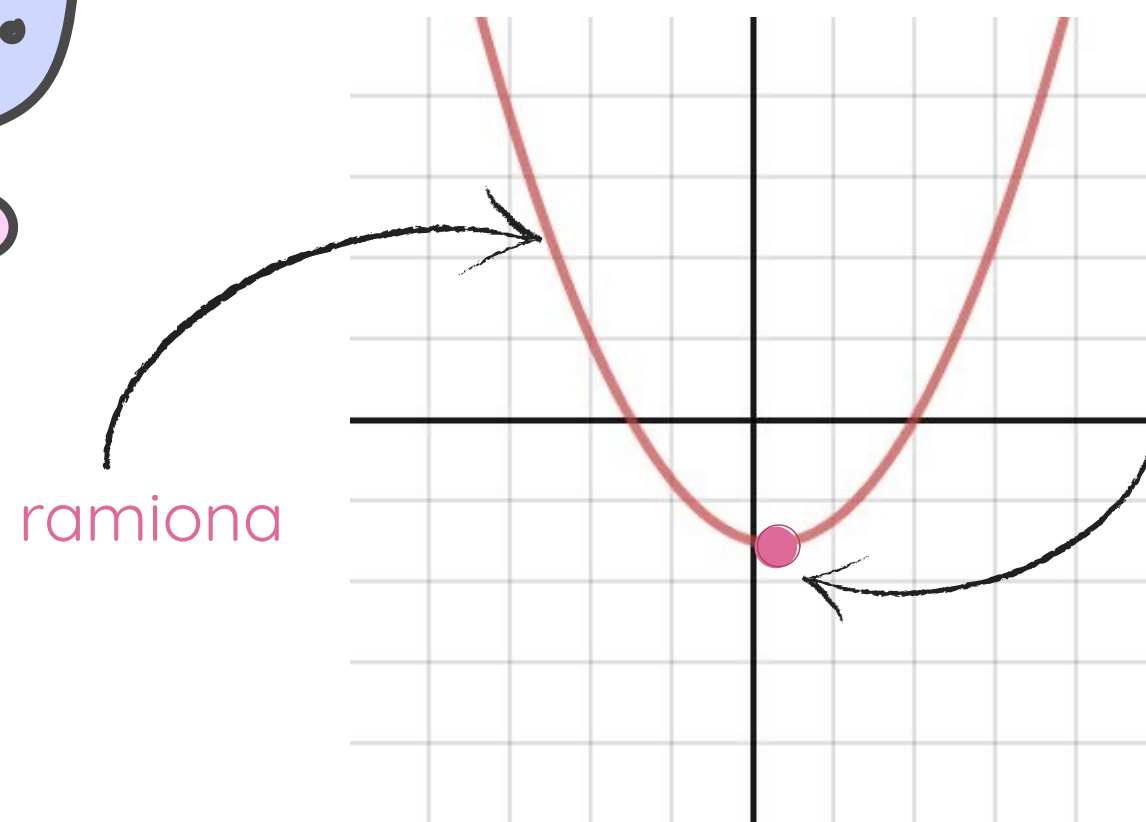
Przygotowały:
Lena Supera
Margarita Mazurok
Oliwia Świderska

Funkcja kwadratowa

$$ax^2 + bx + c$$

Wszystko co najważniejsze
w pigułce!!!

—> jest przedstawiana w
formie paraboli

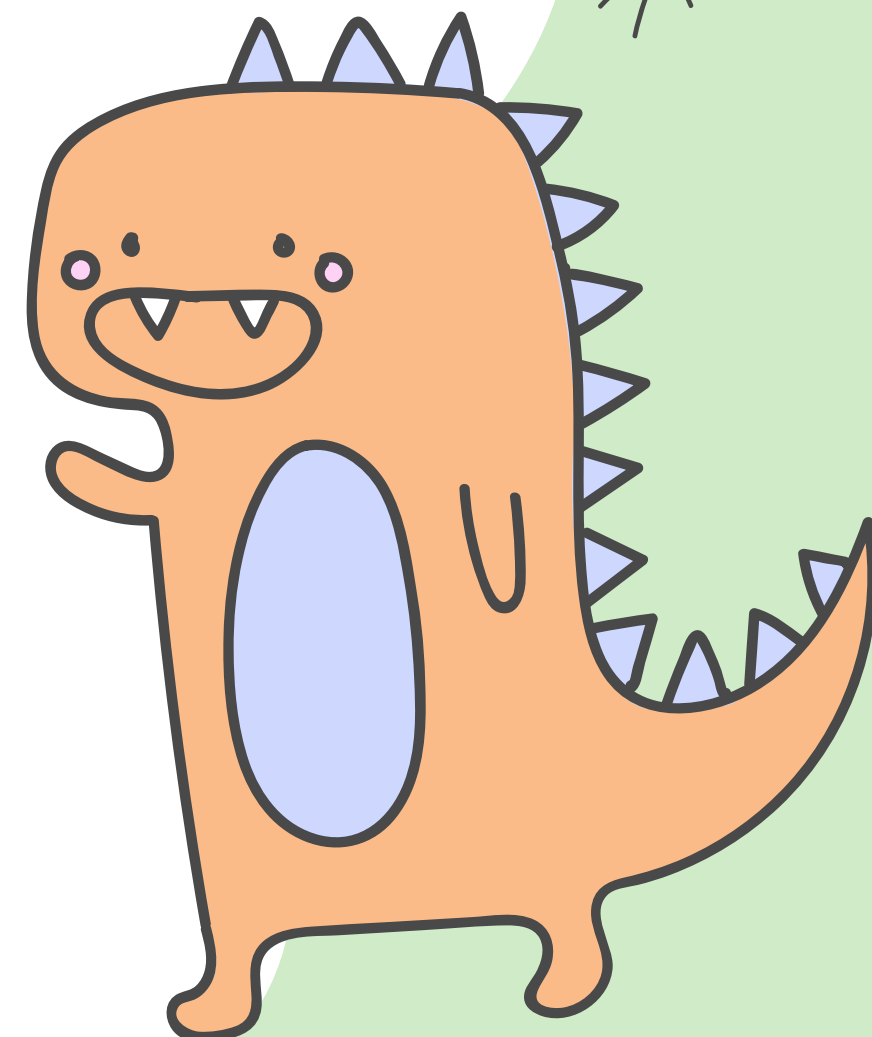
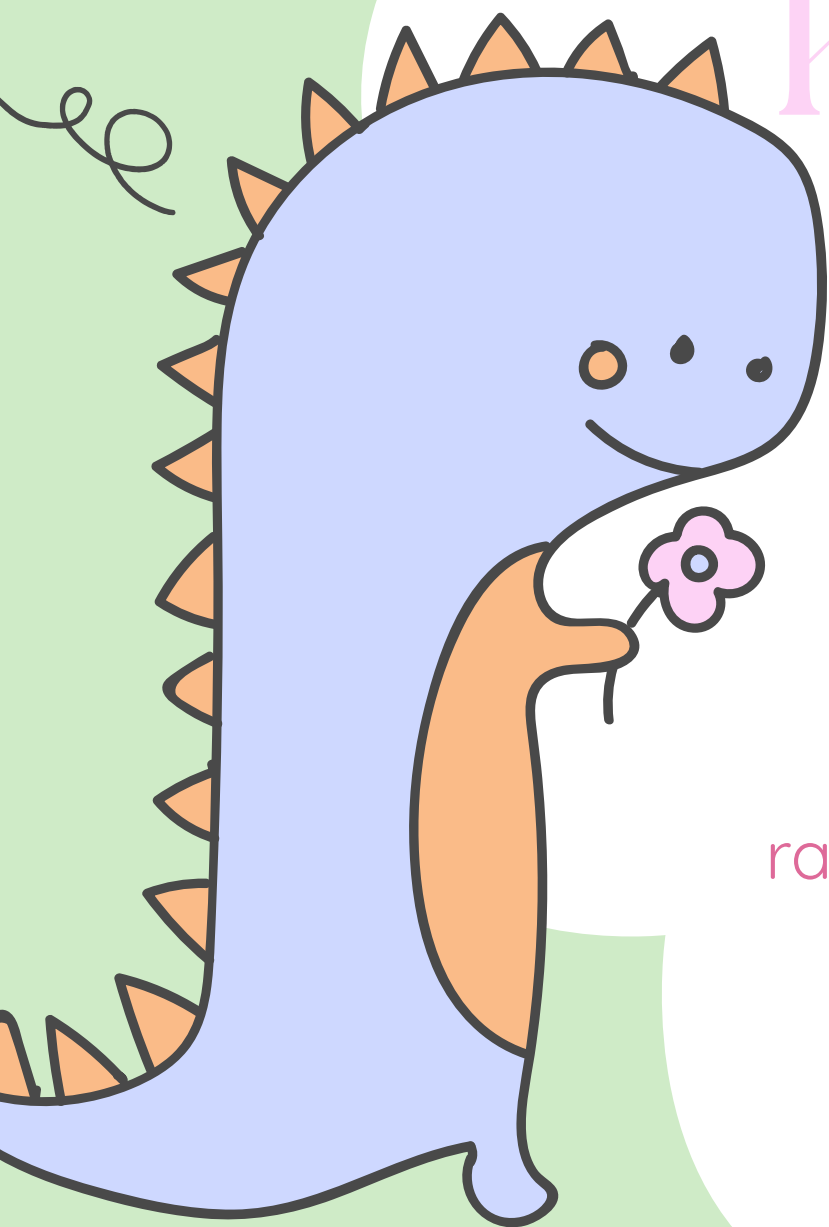


wierzchołek

-o współrzędnych (p, q) , który
możemy wyliczyć ze wzorów:

$$p = \frac{-b}{2a} \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$



Funkcja ta może być przedstawiona w 3 postaciach : *

1. OGÓLNA

$$\longrightarrow ax^2 + bx + c$$

2. KANONICZNA

$$\longrightarrow a(x-p)^2 + q$$

3. ILOCZYNOWA (tylko gdy występują miejsca zerowe!)

$$\longrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$$



Postać ogólna

$$y = ax^2 + bx + c$$

współczynnik
kierunkowy

$$a \neq 0$$

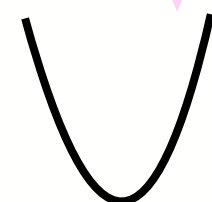
współczynniki
funkcji

$$p = \frac{-b}{2a}$$

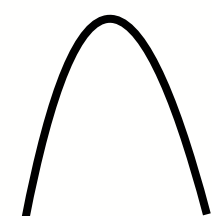
$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

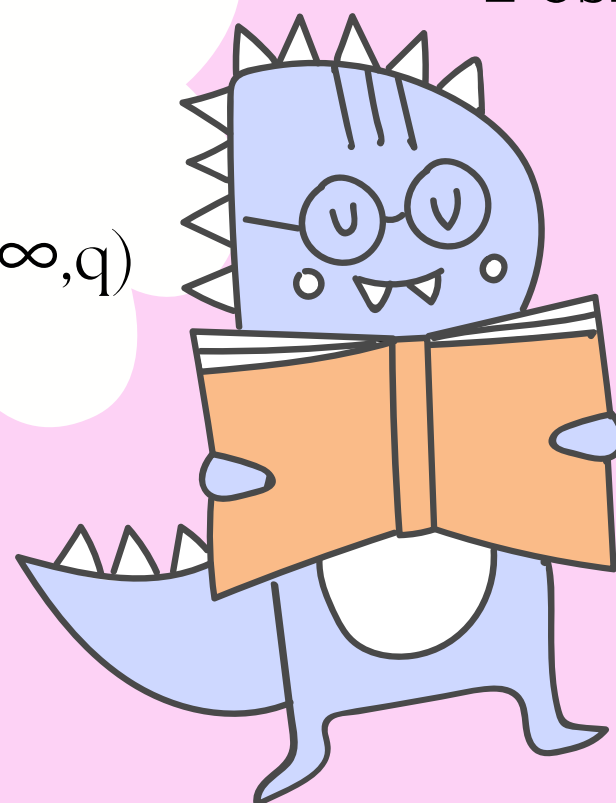
Współrzędne wierzchołka
 $W(p, q)$

punkt przecięcia
z osią OY: $(0, c)$

$a > 0 \rightarrow$  ZW: $y \in [q, \infty)$

$a = 0 \rightarrow$ 

$a < 0 \rightarrow$  ZW: $y \in (-\infty, q]$



wyróżnik trójmianu kwadratowego Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



za pomocą Δ możemy znaleźć miejsca zerowe

gdy $\Delta > 0$ mamy dwa pierwiastki które
można obliczyć za wzorami:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

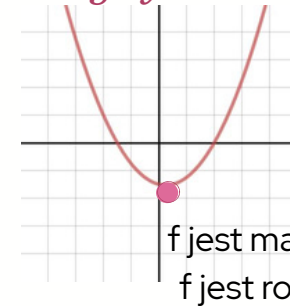
gdy $\Delta = 0$ równanie ma jeden pierwiastek

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

gdy $\Delta < 0$ brak pierwiastków

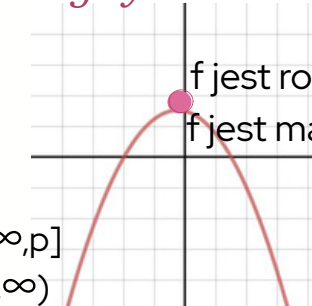
Monotoniczność

gdy $a > 0$ to



f jest malejąca w przedziale: $(-\infty, p]$
 f jest rosnąca w przedziale $[p, \infty)$

gdy $a < 0$ to

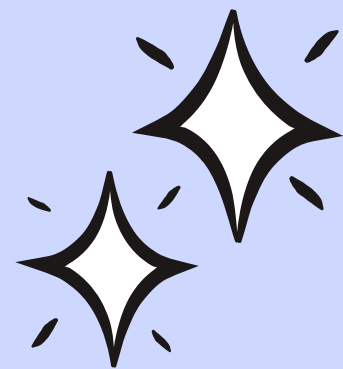
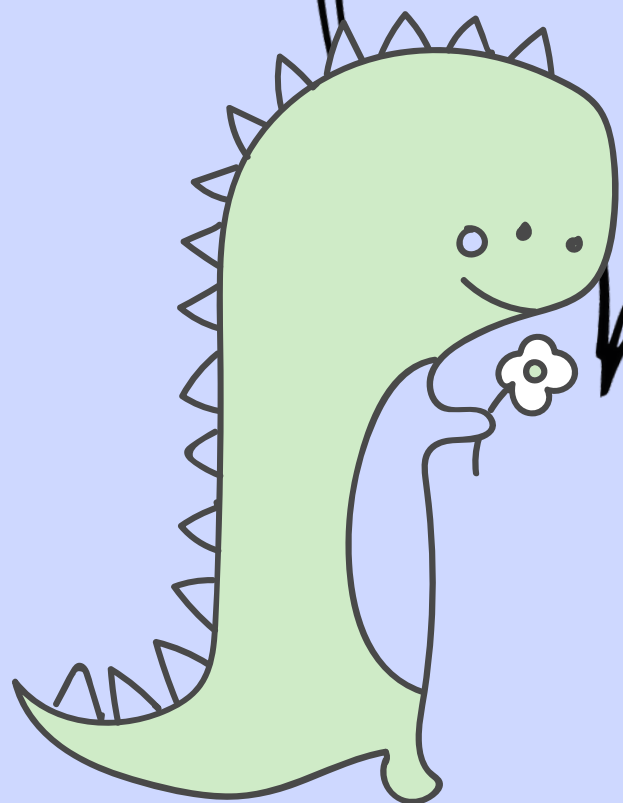


f jest rosnącą w przedziale: $(-\infty, p]$
 f jest malejąca w przedziale $[p, \infty)$

Postać kanoniczna

✧ ✧ ✧ $y = a(x-p)^2 + q$

W tej postaci od razu widzimy współrzędne wierzchołka, czyli p oraz q



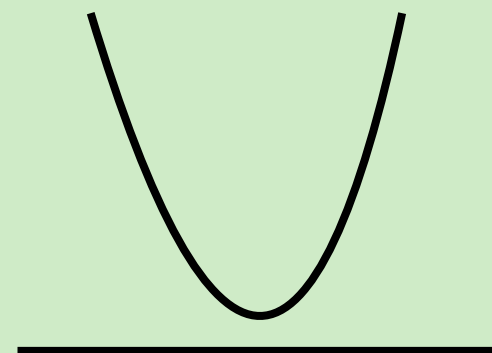
W postaci ogólnej widzimy pierwiastki równania

$y = a(x-x_1)(x-x_2)$ gdy są 2 miejsca zerowe
 $a(x-x_0)^2$ gdy jest tylko jedno miejsce zerowe

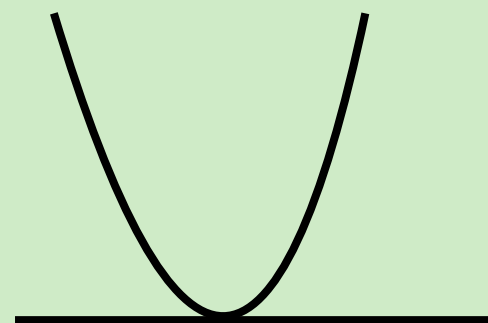


Postać iloczynowa

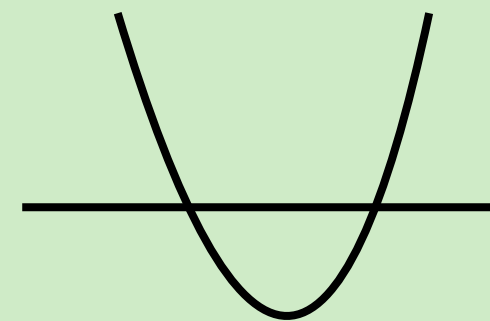
Interpretacja geometryczna



$$a > 0$$
$$\Delta < 0$$



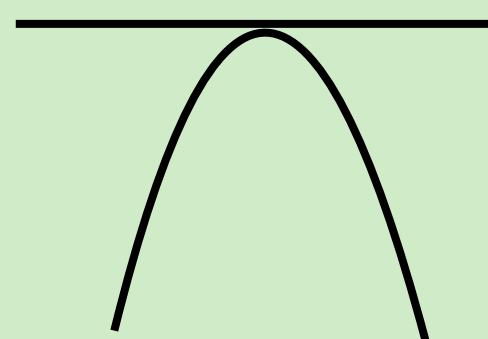
$$a > 0$$
$$\Delta = 0$$



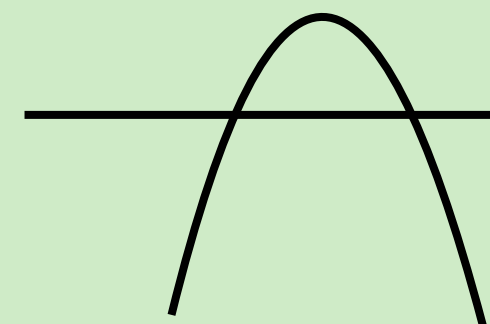
$$a > 0$$
$$\Delta > 0$$



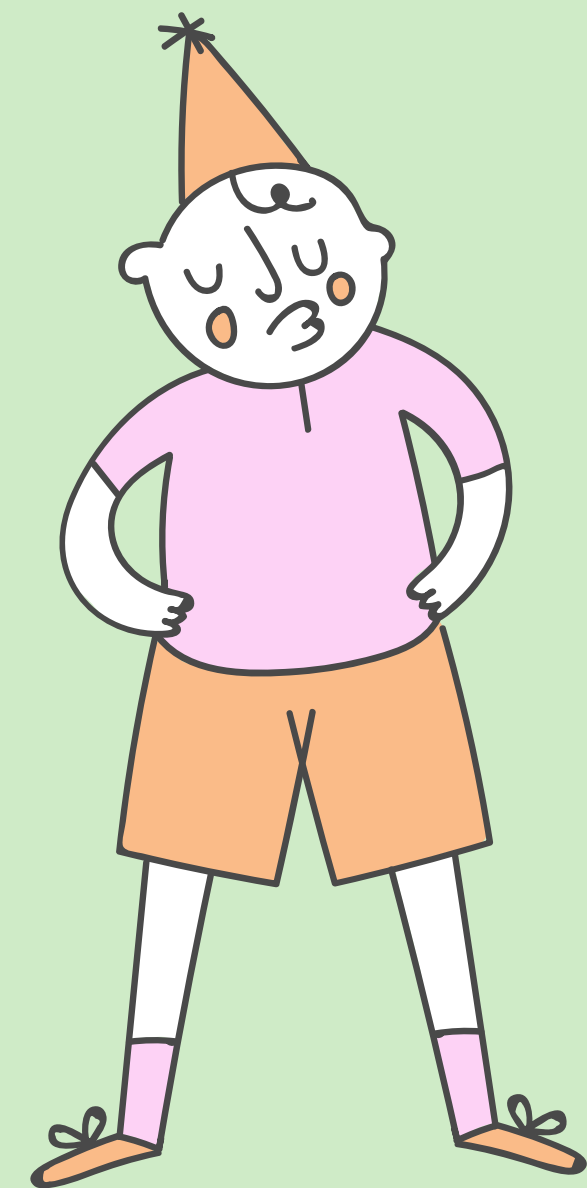
$$a < 0$$
$$\Delta < 0$$



$$a < 0$$
$$\Delta = 0$$



$$a < 0$$
$$\Delta > 0$$



Równania kwadratowe

1. przypadek gdy $c=0$ 2. gdy $b=0$

czyli $ax^2+bx=0$

np. $-7x^2+42=0$

wtedy najlepiej przekształcić funkcję do postaci iloczynowej:

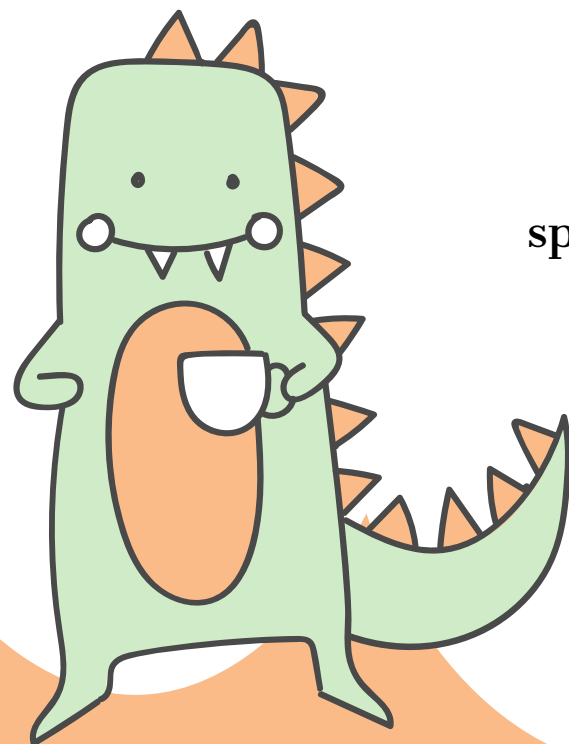
$-7x(x-6)=0$

taka postać pozwalana nam zobaczyć odtazu miejsca zerowe ponieważ

$-7x=0$ oraz $x-6=0$

$x_1=0$

$x_2=6$



czyli ax^2+c

np. $x^2-4=0$

najlepiej zauważyć wzor skróconego mnożenia czyli:

$(x-2)(x+2)=0$

wtedy wykorzystując postać iloczynowa widzimy

miejsca zerowe:

$x=2$ lub $x=-2$

PAMIĘTAJ!

gdy $x^2=\text{liczba ujemna}$ to równanie jest sprzeczne (liczba podniesiona do kwadratu nigdy nie będzie ujemna)

np. $x^2+4=0$

$x^2 \neq -4$



jak je rozwiązać?

3. gdy równanie ma postać:

$ax^2+bx+c=0$

np. $x^2+x-6=0$

w takim przypadku obliczamy deltę ze wzoru:

$\Delta = b^2 - 4ac$

tutaj $\Delta=25$

następnie

gdy $\Delta > 0$ mamy dwa pierwiastki które można obliczyć za wzorami:

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
 $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

gdy $\Delta = 0$ równanie ma jeden pierwiastek

$x_0 = \frac{-b}{2a}$

gdy $\Delta < 0$ brak pierwiastków

w naszym przykładzie delta jest dodatnia więc wyliczamy oba miejsca zerowe (rozwiązania równania) ze wzorów podanych w tabelce stąd:

$x_1=2$

$x_2=-3$

Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Czym są?

to takie równania, które po odpowiednich przekształceniach algebraicznych możemy zapisać w postaci równania kwadratowego. Dzięki temu możemy je rozwiązać, stosując metody znane dla równań kwadratowych



1. Jak rozwiązać?

$$x^4 - 13x^2 + 30 = 0,$$

Metoda rozwiązania:

- 1) Wprowadź zmienną pomocniczą $t = x^2$
- 2) Zastąp powtarzające się wyrażenia zmienną t , powinieneś otrzymać zwykłe równania kwadratowe.

$$(t)^2 - 13t + 36 = 0$$

- 3) Rozwiąż równanie kwadratowe, użyj wzorów na delte i pierwiastki

$$t_1 = 4 \quad t_2 = 9$$

- 4) Podstaw znalezione wartości t do równania z podstawienia i rozwiąż te równania, żeby znaleźć x

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ lub } x = -2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ lub } x = -3$$



Przykłady takich równań:

→ Równania dwukwadratowe

(zmienna $t = x^2$)

możemy ogólnie zapisać je jako:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

→ Z pierwiastkami

(zmienną t jest wtedy $\sqrt{x}$)

$$\text{np. } x^2 + \sqrt{x} - 6 = 0$$

→ Z wartością bezwzględną

(zmienną t jest $|x|$)

$$\text{np. } x^2 - 4|x| + 4 = 0$$

Nierówności kwadratowe ✨

1. przypadek, gdy $\Delta > 0$

$$-2x^2 + 7x - 4 < 0$$

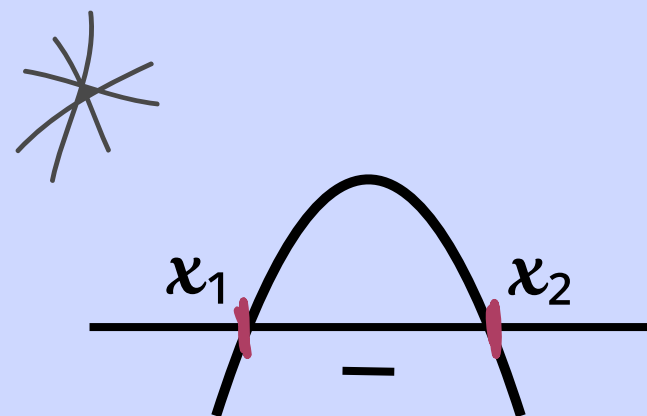
1. Obliczamy deltę: $\Delta = 17$

Delta jest większa od zera, czyli mamy dwa pierwiastki równania i obliczamy je ze wzorów.

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{17}}{-4} \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{17}}{-4}$$

2. Szkicujemy parabolę z ramionami do dołu (ponieważ $a < 0$), przechodzącą przez x_1 i x_2 .

Szukamy odpowiednie przedziały, spełniające nierówność ✨



$$x \in (-\infty, \frac{-7 - \sqrt{17}}{-4}) \cup (\frac{-7 + \sqrt{17}}{-4}, \infty)$$

gdy $\Delta > 0$ mamy dwa pierwiastki które można obliczyć za wzorami:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

gdy $\Delta = 0$ równanie ma jeden pierwiastek

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

gdy $\Delta < 0$ brak pierwiastków

2. przypadek, gdy $\Delta = 0$

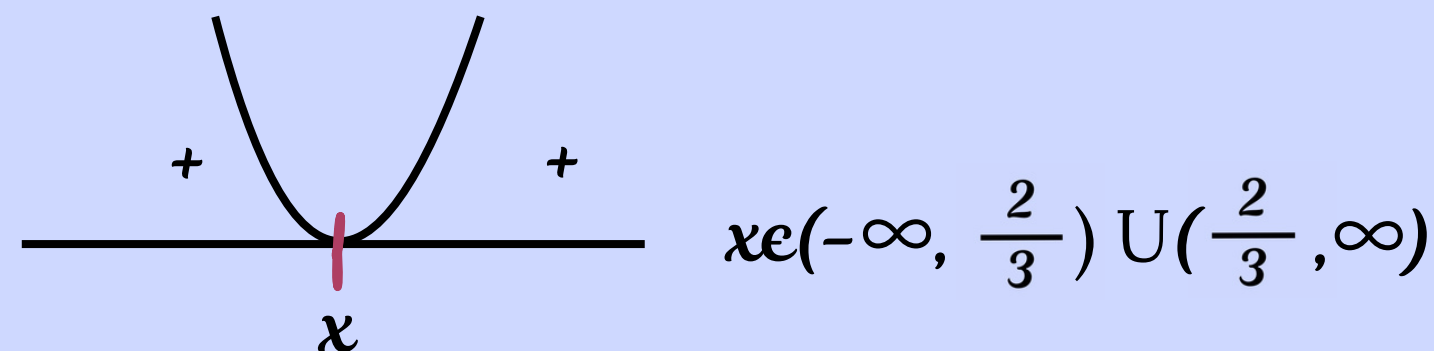
$$9x^2 - 12x + 4 > 0$$

1. Obliczamy Δ : $\Delta = 0$

Delta jest równa zero, więc równanie ma jeden pierwiastek, który obliczamy ze wzoru.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{3}$$

2. Szkicujemy parabolę z ramionami do góry, mającą tylko jeden wspólny punkt z osią OX



$$x \in (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$$

Pamiętaj, że wszystko zależy od znaku oraz a .
W tym przypadku, gdyby był znak $\geq$ to równanie spełniałaby każda liczba



Wzory Viete'a

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, można wyznaczyć ich sumę i iloczyn.

Jesli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ ma pierwiastki x_1, x_2 to:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \text{ oraz } x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Liczby x_1, x_2 są dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1+x_2 > 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 są ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1+x_2 < 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$

Uwaga!!! Wzory Viète'a możemy stosować jedynie wtedy, gdy równanie ma pierwiastki, tzn. gdy $\Delta \geq 0$.

