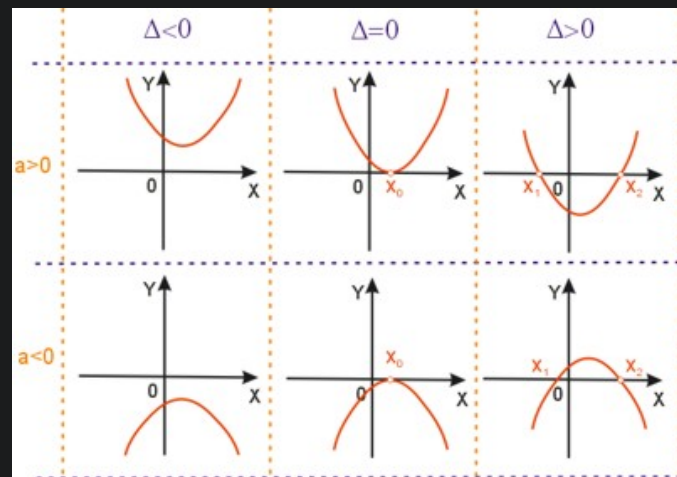


Wygląd paraboli zależnie od a i delty



Wierzchołek $(x, y) = (p, q)$
Przecięcie z osią OY: $(0, c)$

$$\begin{aligned} a > 0 \quad f \uparrow &= [p, \infty) \\ f \downarrow &= (-\infty, p] \\ a < 0 \quad f \uparrow &= (-\infty, p] \\ f \downarrow &= [p, \infty) \end{aligned}$$



Funkcja Kwadratowa

Postać ogólna:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Postać kanoniczna:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$
$$p = \frac{-b}{2a}$$
$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Postać iloczynowa:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{-b}{2a}$$
$$a > 0: ZW = [q, \infty)$$
$$a < 0: ZW = (-\infty, q]$$

2. Wykres Funkcji - Parabola

Kształt i Kierunek Ramion

• Współczynnik a:

- Gdy $a > 0$: Ramiona paraboli skierowane są w górę (funkcja osiąga minimum).
- Gdy $a < 0$: Ramiona paraboli skierowane są w dół (funkcja osiąga maksimum).
- Szerokość Paraboli: Im większa jest wartość bezwzględna $|a|$, tym parabola jest węższa (bardziej "stroma").

Wierzchołek Paraboli

• Współrzędne Wierzchołka $W = (p, q)$:

• Wzory na współrzędne w postaci ogólnej:

$$p = \frac{-b}{2a}$$
$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

• Wy różni, że p to oś symetrii paraboli (prosta o równaniu $x = p$).

Wy różnik (Δ) i Miejsca Zerowe

• Wzór na Wy różnik (Delta):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

• Liczba Miejs Zerowych:

• $\Delta > 0$ (dwa miejsca zerowe):

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

• $\Delta = 0$ (jedno miejsce zerowe, pierwiastek podwójny):

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad (\text{jest to również } p)$$

• $\Delta < 0$ (brak miejsc zerowych): Parabola leży całkowicie nad lub pod osią OX.

3. Analiza Funkcji

Własności Kluczowe

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$ (zawsze).
- Zbiór Wartości:
 - Gdy $a > 0$: $ZW_f = [q, \infty)$
 - Gdy $a < 0$: $ZW_f = (-\infty, q]$
- Punkt Przecięcia z Ośią OY: $(0, c)$ (wstawiając $x = 0$ do wzoru ogólnego).

Monotoniczność (Przedziały Rosnące i Malejące)

- Gdy $a > 0$ (ramiona w górę):
 - Funkcja malejąca w przedziale: $(-\infty, p)$
 - Funkcja rosnąca w przedziale: (p, ∞)
- Gdy $a < 0$ (ramiona w dół):
 - Funkcja rosnąca w przedziale: $(-\infty, p)$
 - Funkcja malejąca w przedziale: (p, ∞)

Wartość Najmniejsza i Największa

- Wartość Ekstremalna (wierzchołek):
 - Dla $a > 0$: Wartość najmniejsza to q (osiągana dla $x = p$). Wartość największa nie istnieje.
 - Dla $a < 0$: Wartość największa to q (osiągana dla $x = p$). Wartość najmniejsza nie istnieje.

• Wartości w Przedziale Domkniętym $[x_{\min}, x_{\max}]$:

- Wartość ekstremalna to q (jeśli p należy do przedziału).
- Wartości na krańcach przedziału: $f(x_{\min})$ i $f(x_{\max})$.
- Wartość najmniejsza i największa to $\min\{q, f(x_{\min}), f(x_{\max})\}$ i $\max\{q, f(x_{\min}), f(x_{\max})\}$.

Znak Funkcji (Nierówności Kwadratowe)

- Szkicowanie paraboli jest kluczowe!
- $f(x) > 0$ (nad osią OX)
- $f(x) < 0$ (pod osią OX)

Podstawowe informacje

4. Dodatkowe Wzory i Zastosowania

Wzory Viete'a

Jeśli $\Delta \geq 0$, to:

• Suma miejsc zerowych:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

• Iloczyn miejsc zerowych:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

• Zastosowanie: Pomocne w szybkim sprawdzaniu rozwiązań, budowaniu równania kwadratowego na podstawie pierwiastków.

Równanie Kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

• Rozwiązanie: Poszukiwanie miejsc zerowych (użyjcie Δ).

Przykładowe Zastosowania

- Rzuty Ciała: Tor lotu pocisku (parabola).
- Ekonomia: Maksymalizacja zysku lub minimalizacja kosztów.
- Inżynieria/Architektura: Kształt mostów łukowych, reflektorów.

Propozycja Struktury w Canvie (Wskazówki Wizualne)

1. Centralny Punkt: Umieść duży tytuł "FUNKCJA KWADRATOWA" oraz jej postać ogólną $f(x) = ax^2 + bx + c$.
2. Trzy Kolumny/Sekcje:
 - Sekcja 1: Wzory (Postacie): Ogólna, Kanoniczna (z wierzchołkiem $W(p, q)$), Iloczynowa (z miejscami zerowymi x_1, x_2).
 - Sekcja 2: Delta (Δ): Duży wzór $\Delta = b^2 - 4ac$ i trzy podpunkty z rysunkami paraboli: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.
 - Sekcja 3: Własności: Monotoniczność (z rysunkiem $a > 0$ i $a < 0$), Zbiór Wartości, Wierzchołek, Oś Symetrii ($x = p$).
3. Dodatki (Na dole/Boczne Panele): Wzory Viete'a, Przykładowe Zastosowania.
4. Kolory: Użyj koloru dla $a > 0$ (np. zielony - ramiona w górę) i innego dla $a < 0$ (np. czerwony - ramiona w dół) aby wizualnie rozdzielić te przypadki.

Pamiętaj o estetyce - proste, czytelne czcionki i dużo wolnej przestrzeni! Powodzenia z projektem!

Wzory Viete'a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Inne Zależności:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-b}{c}$$

