WIELOMIANY

$$R(x) = W(x) \cdot P(x) - Q(x) = (x^3+1) \cdot (x^2-2x) - (3x^2-5x+1) =$$

$$x^5 - 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 5x - 1 = x^5 - 2x^4 - 2x^2 + 3x - 1$$

$$\underline{\underline{R(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^2 + 3x - 1}}$$

Definicja wielomianu

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

np. $W(x) = \underset{a_4}{3}x^4 + \underset{a_3}{7}x^3 + \underset{a_2}{5}x^2 + \underset{a_2}{28}x + \underset{a_0}{30}$

Równość wielomianów

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$V(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

wielomiany $W(x)$, $V(x)$ są równe $\iff \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ a_0 = b_0 \end{cases}$

np. $W(x) = 3x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 28x + 30$

$V(x) = (m^3+2)x^4 + (m^2+6)x^3 + (14m+1)x^2 + (27m^2+1)x + 30$

$$\begin{cases} 3 = m^3 + 2 & m^3 = 1 & m = 1 \\ 7 = m^2 + 6 & m^2 = 1 & m = 1 \vee m = -1 \\ 15 = 14m + 1 & 14 = 14m & m = 1 \\ 28 = 27m^2 + 1 & 27 = 27m^2 & m = 1 \vee m = -1 \end{cases}$$

Wielomiany $W(x)$, $V(x)$ są równe dla $m = 1$

Dzielenie wielomianów

Są dwie techniki dzielenia wielomianów:

1) dzielenie pisemne

2) schemat Hornera

1)

$$
\begin{array}{l}
\quad x^3 + 2x \\
\hline
(x^5 + 3x^3 + 2x) : (x^2+1) \\
-(x^5 + x^3) \\
\hline
\quad 2x^3 + 2x \\
\quad -(2x^3 + 2x) \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

$$x^3(x^2+1) = x^5 + x^3$$
$$2x(x^2+1) = 2x^3 + 2x$$

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2 + 3 \\
\hline
(x^5 + x^2 - 6x + 8) : (x^3 - 3x + 1) \\
-(x^5 - 3x^3 + x^2) \\
\hline
\quad 3x^3 - 6x + 8 \\
-(3x^3 - 9 + 3) \\
\hline
\qquad 3x + 5
\end{array}
$$

$$x^2(x^3 - 3x + 1) = x^5 - 3x^3 + x^2$$
$$3(x^3 - 3x + 1) = 3x^3 - 9x + 3$$

$$\underbrace{x^5 + x^2 - 6x + 8}_{W(x)} = \underbrace{(x^3 - 3x + 1)}_{P(x)} \cdot \underbrace{(x^2+3)}_{Q(x)} + \underbrace{3x+5}_{R(x)}$$

2) schemat Hornera

$a_3 = 1 \qquad a_2 = -3 \qquad a_1 = -4 \qquad a_0 = 12$

(dzielimy przez $(x-2)$)

	1	-3	-4	12
2	1	-1	-6	0 = R

to samo

$\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$

$$\frac{W(x)}{x-2} = x^2 - x - 6$$

$$W(x) = (x-2)(x^2 - x - 6)$$

Twierdzenie o dzieleniu wielomianów

jeżeli dzielimy wielomian $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ i wychodzi nam wynik z dzielenia wielomian $Q(x)$ i reszta wielomian $R(x)$, to:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

przy czym st. $R(x) <$ st. $P(x)$

np. jeżeli st. $P(x) = 3$, to st. $R(x) \in \{0, 1, 2\}$

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

$$R(x) = 3x + 5$$

$$a = 0, \; b = 3, \; c = 5$$

Twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$

$$W(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R$$

$$W(a) = R$$

Twierdzenie Bezout'a

wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, tzn $W(a) = 0$

ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI

sp. I grupowanie wyrazów

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$x^2(x-3) - 4(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 \underset{\underset{2^2}{\parallel}}{-4}) = 0$$

$$(x-3)(x-2)(x+2) = 0$$

$x-3=0 \lor x-2=0 \lor x+2=0$

$x=3 \quad x=2 \quad x=-2$

sp. II

$$\overbrace{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}^{W(x)} = 0$$

$a_3 = 1 \quad a_2 = -3 \quad a_1 = 4 \quad a_0 = 12$

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad , a_n \neq 0 \quad , a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$

jeżeli liczba $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ jest pierw. wielomianu $W(x)$ to p / a_0, q / a_n

dzielniki a_0: $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

dzielniki a_3: $q \in \{\pm 1\}$

kandydaci na bycie pierw. wielomianu $W(x)$: $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$W(2) = 0 \Rightarrow x-2 \mid W(x)$

dalej schemat hornera i wyznaczamy pierwiastki równania

Nierówności wielomianowe

UWAGA!

$a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

$a>0$ rysujemy od prawej strony od góry

$a<0$ rysujemy od prawej strony od dołu

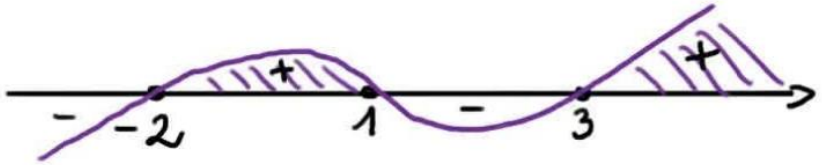
krotność parysta „odbijemy"

krotność nieparysta „przechodzi"

np. $(x-1)(x+2)(x-3)\geq 0$

$x-1=0$ $\quad x+2=0$ $\quad x-3=0$

$x=1$ $\quad x=-2$ $\quad x=3$

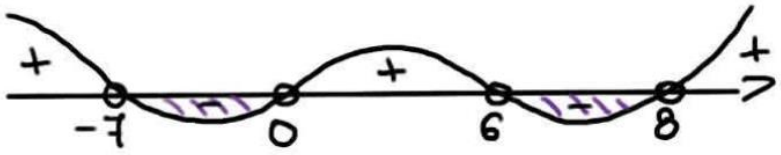


$x\in[-2,1]\cup[3,+\infty)$

$x(x-6)(x+7)(x-8)<0$

$x=0$ $\quad x-6=0$ $\quad x+7=0$ $\quad x-8=0$

$x=6$ $\quad x=-7$ $\quad x=8$



$x\in(-7,0)\cup(6,8)$

Wzory skróconego mnożenia 3 stopnia

sześcian sumy

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

suma sześcianów

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

sześcian różnicy

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

różnica sześcianów

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

KONIEC